

Publicação Especial

Nº 12/94

Estabilidade Linear de Pontos de Equilíbrio e Órbitas
Periódicas Aplicada a Alguns Problemas da
Dinâmica Orbital

Ricardo Reis Cordeiro

Tese de Doutorado
Rio de Janeiro, 18 de Novembro de 1994

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO
E TECNOLÓGICO
OBSERVATÓRIO NACIONAL
Departamento de Astronomia

Tese apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Astronomia

**ESTABILIDADE LINEAR DE PONTOS DE EQUILÍBRIO E ÓRBITAS
PERIÓDICAS APLICADA A ALGUNS PROBLEMAS DA
DINÂMICA ORBITAL**

por

Ricardo Reis Cordeiro

Defendida em 18 de Novembro de 1994, perante a banca composta por:

Dr. Roberto Vieira Martins Presidente/Orientador - ON/CNPq

Dr. Rodney da Silva Gomes - ON/CNPq

Dr. Jair Koiller - UFRJ-LNCC/CNPq

Dr. Wagner Sessin - ITA/CTA

Dr. Tadashi Yokoyama - UNESP

Aos meus pais
Cícero e Ione

A minha esposa
Simone

E aos meus filhos
Pedro e Felipe

RESUMO

Neste trabalho nós aplicamos a análise da estabilidade linear de pontos de equilíbrio, e de órbitas periódicas, a vários problemas da Dinâmica orbital, via a teoria de Krein. Como exemplo da aplicação da análise da estabilidade a órbitas periódicas, nós estudamos o problema de dois corpos, expresso nas variáveis de Delaunay, e submetido a uma particular perturbação. Neste estudo destacamos o desenvolvimento de um método para o cálculo dos autovetores via manipuladores algébricos, e mostramos um procedimento para o estudo da estabilidade de órbitas periódicas de problemas perturbados.

No estudo envolvendo pontos de equilíbrio, nós começamos pela análise de potenciais genéricos, e aplicamos os resultados encontrados ao Problema Restrito de Três Corpos, e ao problema de satélites estacionários de corpos oblatos e prolatos. Posteriormente, estudamos o efeito de pequenas perturbações conservativas sobre os autovalores de pontos de equilíbrio. Aqui, nós desenvolvemos um novo método para a determinação da parte perturbada dos autovalores, que difere dos métodos tradicionais por não necessitar do emprego dos autovetores. Esta análise foi aplicada ao estudo dos pontos perturbados L_4 e L_5 dos planetas jovianos, assim como de Marte, considerando um modelo circular, e também foi aplicada ao estudo da estabilidade do satélite geoestacionário, considerando a terra como um corpo oblato e a Lua como o corpo perturbador, também em órbita circular.

E por último estudamos o efeito de uma força dissipativa sobre a estabilidade do movimento de uma partícula próxima ao ponto L_4 de Júpiter, e estando submetida a ação de uma força dissipativa (efeito de Poynting-Robertson). Nesta etapa, todas as integrações efetuadas foram feitas via a técnica de mapeamento para problema dissipativo, que foi desenvolvido para este estudo.

ABSTRACT

In this work we apply the analysis of the linear stability of the equilibrium points, and of the periodic orbits, to some problems of the Orbital Dynamics, via Krein's Theory. As example of the application of the analysis to periodic orbits, we study the Two-Body Problem, in Delaunay's variable, and submitted to an especial perturbation. In this study we detach the methods to calculate the eigenvectors, by algebraic manipulators, and we show a procedure to study of the stability of periodic orbits of the perturbed problem.

In study comprehending the equilibrium points, we begin by analysis of generic potentials, and we apply the obtained results to the Restricted Three-Body Problem, and to the problem of the stationary satellite of the oblate and prolate bodies. Also, we study the effect of the small conservative perturbation on the eigenvalues of the equilibrium points. Here, we develop a new method for the determination of perturbed part of the eigenvalue. This method differs with standard methods because it does not require the use of the eigenvectors. This analysis was applied to study of the disturbed lagrangian points of Jovian planets, as well as of Mars, where we use a circular model. Subsequently we study the stability of geostationary satellites, considering the Earth as an oblate body, and the Moon as the disturbing body with a circular orbit.

In last part we study the effect of a dissipative force on the stability of the motion of a particle near of the lagrangian point of Jupiter. For the dissipative force we use the Poynting-Robertson effect. In this stage, the integrations were done by mapping for the dissipative problem that we developed.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Roberto Vieira Martins, pela amizade, pela orientação segura, e pelo apoio constante dado ao longo deste trabalho.

Ao Dr. Rodney Gomes, pelas interessantes discussões relacionadas aos problemas dissipativos, algumas das quais resultaram em partes dos capítulos 6 e 7 desta tese.

Ao Dr. Jair Koiller, pela acolhida nos seminários do LNCC, e por algumas sugestões contidas no capítulo 2 deste trabalho.

A Dr.a. T. Stuchi, pelas discussões sobre integradores simpléticos.

Aos Dr. Carlos Henrique e Dr. Roberto Chan, pelas dicas sobre programação.

Aos colegas do Departamento de Física da Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade que me deram para fazer este trabalho.

A Universidade Federal de Viçosa e CAPES, pelos subsídios fornecidos.

Aos amigos prof. Gilson Vieira e prof. Marcelo Assafim, pelo companheirismo.

A Luzia Penalva, por ter me socorrido várias vezes junto ao MTS.

A Kátia e Lúcia, pelo pronto atendimento em resolver os meus problemas relacionados ao material bibliográfico.

A Nilda, pela paciência e boa vontade junto a CPG.

E a todos os colegas da Pós-Graduação.

ÍNDICE

Introdução.....	1
1 Estabilidade Linear e a Teoria de Krein.....	5
1.1 Estabilidade Linear.....	5
1.2 Teoria de Krein.....	10
2 Órbitas Periódicas.....	17
2.1 O Autovalor +1.....	17
2.2 O Método.....	21
2.3 O Cálculo dos Autovalores.....	23
2.4 Aplicação.....	27
3 Pontos de Equilíbrio para Potenciais Genéricos.....	37
3.1 Pontos de Equilíbrio de Potenciais em Rotação.....	37
3.2 O Potencial $U(r)$	40
3.3 O Potencial $U(r, \theta)$	45
3.4 O Potencial $U(r, \phi)$	47
3.5 O Potencial $U(r, \theta, \phi)$	53
4 Aplicação do Estudo para os Pontos de Equilíbrio	55
4.1 O Problema Restrito de Três Corpos.....	55
4.1.1 A Análise da Estabilidade e as Assinaturas dos Autovalores.....	55
4.2 Pontos de Equilíbrios para o Potencial de Corpos Oblatos e Prolatos.....	60
4.2.1 A Análise da Estabilidade e as Assinaturas dos Autovalores.....	60
5 Autovalores Perturbados.....	66
5.1 Pontos de Equilíbrios Perturbados.....	66
5.2 Autovalores Perturbados.....	67
5.3 Perturbação dos Pontos Lagrangeanos Equilaterais.....	70
5.4 Satélites Geoestacionários	81
6 Mapeamento para Problemas Dissipativos da Dinâmica Orbital.....	83
6.1 O Mapeamento Geral de Wisdom e Holman.....	84
6.2 O Mapeamento Dissipativo.....	87
6.3 Métodos Mistos para a Integração de Órbitas.....	90
7 Estabilidade Linear de Problemas Dissipativos	96
7.1 Um Hamiltoniano Heliocêntrico para o Problema Restrito.....	96
7.2 Pontos de Equilíbrios Perturbados.....	98
7.3 Frequências Próprias e Autovalores Perturbados.....	100
Conclusão.....	108
Bibliografia.....	111

INTRODUÇÃO.

Neste trabalho aplicamos a análise da estabilidade linear a alguns problemas da Dinâmica Orbital, empregando a teoria de Krein e também algumas técnicas recentes para a determinação de autovalores perturbados e para a integração de órbitas. A grosso modo, o objetivo da análise da estabilidade linear é permitir saber se as soluções vizinhas, em um determinado tempo inicial t_0 , a uma dada solução de referência, \bar{x} , permanecerão como tal (sempre próximas a \bar{x}) para todo tempo $t \in (-\infty, +\infty)$ (no capítulo 1 daremos uma definição mais precisa).

Esta análise aplicada aos pontos de equilíbrio e às órbitas periódicas tem sido de muita utilidade e emprego na Mecânica Celeste. No que diz respeito ao estudo de pontos de equilíbrio, um dos casos mais notórios, e talvez o mais antigo, foi o estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio do *Problema Restrito de Três Corpos*, PRTC, circular, feito por Lagrange (1873) em 1772. A estabilidade dos pontos L_4 e L_5 demonstrada por Lagrange permaneceu por mais de um século apenas como um interessante resultado teórico até que em 1906 foi feita a descoberta do primeiro asteroide Troiano: 588 Achilles. A partir de então, as regiões em torno dos pontos lagrangeanos (pontos equilátero), não só de Júpiter como também dos demais planetas jovianos, tem sido objeto de muitos estudos; mais recentemente, podemos citar a série de trabalhos, envolvendo investigações numéricas sobre a estabilidade dos pontos L_4 e L_5 de diversos planetas, feitas por Zhang e Innanen (1988a,b,c), Innanen e Mikkola (1989), Mikkola e Innanen (1992) e Holman e Wisdom (1993).

Um outro exemplo da análise da estabilidade linear de pontos de equilíbrio aplicada a um problema da Dinâmica é o estudo da estabilidade de satélites geoestacionários, considerando no modelo do potencial da Terra não só o segundo harmônico zonal, J_2 , mas também a elipsidade do equador. Para este problema Blitzer et al. (1962) mostraram a existência de 4 pontos de equilíbrio equatoriais (quando o problema é estudado em um sistema de referência que está girando com mesma frequência que a da Terra) sendo

que dois destes pontos são estáveis enquanto os outros dois são instáveis. Posteriormente, Howard (1990) estendeu a análise a outros pontos de equilíbrio (não equatoriais) do mesmo problema. Hoje o estudo da análise da estabilidade linear de pontos de equilíbrio é aplicada a uma variedade enorme de problemas do Sistema Solar como também a várias outras áreas da Astronomia como ao estudos de sistemas de estrelas binárias, potencial galáctico, etc.

No estudo específico sobre a estabilidade de órbitas periódicas, um dos pioneiros foi Poincaré (1892). No *Les Méthods Nouvelles de la Mécanique Céleste*, vol. I, encontramos o capítulo IV inteiramente dedicado ao estudo dos expoentes característicos para o problema de órbitas periódicas, e uma aplicação ao problema de três corpos. Ainda no início deste século surgiram as primeiras investigações numéricas para o PRTC, aonde destacamos os trabalhos do grupo de Copenhagen. Stromgren (1935), e de Moulton (1920). Dos trabalhos mais modernos podemos citar Danby (1964), que determinou o matrizante do problema de dois corpos, Deprit e Henrard (1968), com um estudo sobre famílias de órbitas periódicas em torno dos pontos L_4 e L_5 , Broucke (1969), que obteve êxito na análise da estabilidade linear de algumas famílias de órbitas periódicas do PTCR elíptico, e Hadjidemetriou (1982) e (1985), que estudou a estabilidade de órbitas ressonantes, considerando um problema com órbitas circulares, calculando também as respectivas assinaturas.

Como é bastante conhecida, a análise da estabilidade linear é feita determinando-se os autovalores e a forma normal de Jordan da matriz da equação variacional, quando \bar{x} for um ponto de equilíbrio, ou da matriz monodromia, quando \bar{x} for uma órbita periódica (capítulo 1). Porém outras importantes informações poderão ser obtidas se, ao estudo dos autovalores, nós aplicarmos a teoria de Krein. Esta teoria, como veremos no capítulo 1, estende a análise até aos autovetores da matriz da equação variacional, ou da matriz monodromia, e tem como principal característica permitir saber se problemas que são estáveis a priori, poderão permanecer como tal se alguns parâmetros internos do mesmo são variados, ou se pequenas perturbações conservativas são aplicadas.

Neste trabalho nós começamos apresentando no capítulo 1 os resultados que serão empregados ao longo da tese. Este capítulo não tem como objetivo demonstrar as proposições apresentadas, já que as mesmas são encontradas em vários textos de diferentes autores. Sendo assim, sempre que mencionadas, também destacamos uma ou mais referências aonde a demonstração é encontrada. No capítulo 2 nós apresentamos a primeira aplicação da análise da estabilidade linear, com auxílio da teoria de Krein, de um problema perturbado. Este é o único capítulo da tese que trata de um problema envolvendo órbita periódica. Nele nós também apresentamos um método para a determinação dos autovetores que, devido a sua utilidade, também terá o seu emprego estendido ao capítulo 3. No capítulo 3 nós começamos a estudar os problemas envolvendo pontos de equilíbrio. O seu tema central são os pontos de equilíbrio de problemas com até 3 graus de liberdade, cujo potencial possa ser expresso em coordenadas esféricas. Aqui nós apenas estudamos os casos genéricos de potenciais do tipo $U(r)$, $U(r, \theta)$, $U(r, \phi)$ e $U(r, \theta, \phi)$. Para estes potenciais nós determinamos, analiticamente, todos os autovalores, os respectivos autovetores, e conseqüentemente todas as respectivas *assinaturas de Krein*. Como principal resultado, nós mencionamos a análise feita para o potencial $U(r, \phi)$ (o potencial do Problema Restrito Circular e de um corpo oblato ou prolato). No capítulo 4 nós aplicamos os resultados obtidos no capítulo anterior ao Problema Restrito de Três Corpos Circular (caso espacial e planar), e ao potencial de corpos oblatos ou prolatos. Para estes problemas, os deslocamentos dos autovalores também foram analisados para as situações em que alguns pequenos parâmetros internos sofrem variações. No capítulo 5 nós estudamos os deslocamentos sofridos pelos autovalores quando pequenas perturbações conservativas são aplicadas. Para a determinação da parte perturbada dos autovalores, nós apresentamos um método que foi desenvolvido para este fim, e o aplicamos ao estudo relacionado aos pontos L_4 e L_5 quando estes são perturbados por um quarto corpo em órbita circular interna e externa, com inclinação nula, e também ao problema de um satélite geostacionário perturbado pela Lua (considerada com órbita também circular). No capítulo 6 nós apresentamos uma generalização do mapeamento de Wisdom e Holman (1991), que pode ser aplicada também aos problemas envolvendo forças dissipativas, e no capítulo 7 nós estudamos os

deslocamentos sofridos pelos autovalores do PRTC, considerando que o terceiro corpo (partícula) está submetido ao arrasto de Poynting-Robertson.

CAPÍTULO 1.

Estabilidade Linear e a Teoria de Krein.

Este capítulo tem dupla finalidade: A primeira é de estabelecer a notação e linguagem matemática usadas ao longo deste trabalho, e a segunda é de enunciar os principais resultados relacionados com a análise da estabilidade linear e com a teoria de Krein. A maioria das proposições mencionadas aqui não será objeto de demonstração. São resultados já conhecidos e por isso mesmo nos limitaremos a citar as referências aonde encontram-se não só as respectivas comprovações como também maiores comentários.

1.1 Estabilidade Linear.

Seja $H(x)$ ($x \in R^{2n}$), diferenciável indefinidamente (C^∞), o hamiltoniano de um sistema com "n" graus de liberdade. As equações de movimento são dadas por

$$\dot{x} = J \cdot DH(x) \quad (1.1)$$

aonde $J = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$ (O_n é a matriz nula $n \times n$ e I_n é a matriz identidade $n \times n$) e DH é o gradiente do hamiltoniano. Como o sistema (1.1) é sempre autônomo, então, sem a perda da generalidade, o tempo inicial sempre será tomado como $t_0 = 0$. Denotaremos por \bar{x} uma solução do sistema (1.1), que suporemos ser ou um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica. Agora seja $x(t)$ uma órbita vizinha a \bar{x} , dada por $x(t) = \bar{x}(t) + \xi(t)$, aonde $\xi : R \rightarrow R^{2n}$ é um pequeno vetor. Assim, substituindo $x(t)$ em (1.1) e expandindo até a primeira ordem em ξ , temos a *equação variacional*

$$\dot{\xi} = J \cdot D^2H(\bar{x})\xi, \quad (1.2)$$

sendo $D^2H(\bar{x})$ a matriz Hessiana do hamiltoniano na solução \bar{x} . Como o próprio nome indica, as soluções de (1.2) fornecem as variações das soluções de (1.1) em relação a \bar{x} , quando estas partem ($t=0$) de condições iniciais muito próximas a $\bar{x}(t=0)$. Se \bar{x} for um

ponto de equilíbrio, então o sistema (1.2) será um sistema linear homogêneo de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Já, se \bar{x} for uma órbita periódica, então (1.2) será um sistema linear homogêneo de equações diferenciais ordinárias com coeficiente periódicos.

DEFINIÇÃO 1 (ver, por exemplo, Moser, 1958): Chamamos uma solução \bar{x} de (1.1) de estável linearmente se todas as correspondentes soluções ξ de (1.2) forem limitadas para todo tempo: $-\infty < t < +\infty$.

Se \bar{x} é um ponto de equilíbrio, então temos que as soluções de (1.2) são do tipo

$$\xi(t) = e^{J \cdot D^2 H(\bar{x}) \cdot t} \cdot \xi_o \quad (1.3)$$

aonde ξ_o é a deslocamento inicial do problema. Obviamente, para que \bar{x} seja estável, a definição 1 impõem que exista um $k \in R^+$ tal que

$$\|\xi(t)\| \leq k \quad (1.4)$$

para todo $t \in (-\infty, +\infty)$. Isto só ocorrerá se todos autovalores λ_i da matriz $e^{J \cdot D^2 H(\bar{x}) t}$ estiverem no círculo unitário, $|\lambda_i| = 1$, e se a forma normal de Jordan de $J \cdot D^2 H(\bar{x})$ for diagonal. Entretanto, os autovalores de $e^{J \cdot D^2 H(\bar{x}) t}$ são dados por $\lambda_i = e^{\alpha_i t}$, sendo α_i autovalores de $J \cdot D^2 H(\bar{x})$. Assim nós também temos que \bar{x} só será estável se os autovalores de $J \cdot D^2 H(\bar{x})$ possuírem parte real nula ($|\lambda_i| = 1 \Leftrightarrow \Re(\alpha_i) = 0$) e se a sua forma normal de Jordan for diagonal (\Re denota a parte real).

Agora, se \bar{x} for uma órbita periódica, então do teorema de Floquet-Lyapounov (ver, por exemplo, Yakubovic e Starzhinskii, 1975 ou Coddington e Levinson, 1955), nós temos que as soluções de (1.2) são do tipo

$$\xi(t) = P(t) \cdot e^{B \cdot t} \cdot \xi_o \quad (1.5)$$

aonde $P(t)$ é uma matriz periódica e contínua, com o mesmo período de \bar{x} , e B é uma matriz constante. Para que \bar{x} seja estável, da definição 1 nós também temos que a

condição (1.4) deve ser satisfeita. Mas como P é uma matriz periódica e contínua, e portanto existe um $k' \in R^+$ tal que $\|P(t)\| \leq k'$ para todo $t \in (-\infty, +\infty)$, e $\|P \cdot e^{B \cdot t}\| \leq \|P\| \cdot \|e^{B \cdot t}\|$, então a condição (1.4) passa a ser equivalente a existir um $k'' \in R^+$ tal que

$$\|e^{B \cdot t}\| \leq k'' \quad (1.6)$$

para todo tempo $t \in (-\infty, +\infty)$. Novamente tal condição só será satisfeita se os autovalores de $e^{B \cdot t}$ estiverem no círculo unitário, e se a forma normal de Jordan de B for diagonal.

Sabe-se, da teoria de sistemas lineares de equações diferenciais, que o sistema (1.2) possui conjuntos de $2n$ soluções linearmente independentes. O conjunto de todas as soluções de (1.2) forma um espaço vetorial de dimensão $2n$ (ver, por exemplo, Coddington e Levinson, 1955).

DEFINIÇÃO 2: Chamamos a uma matriz cujas $2n$ colunas são $2n$ soluções linearmente independentes de (1.2) de matriz fundamental do sistema (1.2), e chamamos de matrizante do sistema (1.2), $\Delta(t)$, a matriz fundamental deste sistema que é a matriz identidade em $t = 0$.

PROPOSIÇÃO 1 (ver, por exemplo, Hirsch e Smale, 1974): Seja $\phi : R^{2n+1} \rightarrow R^{2n}$ ($\phi(t, x) = \phi_t(x)$) o fluxo de (1.1). Então a matriz $D\phi_t(\bar{x}(0))$ é o matrizante da correspondente equação variacional ($D\phi_t(\bar{x}(0))$ é a matriz jacobiana de ϕ em relação às condições iniciais $\bar{x}(0)$: $\left[\frac{\partial \phi}{\partial x(0)} \right]_{\bar{x}(0)}$).

Portanto, se \bar{x} é um ponto de equilíbrio, então de (1.3) temos

$$\Delta(t) = D\phi_t(\bar{x}(0)) = e^{J \cdot D^2 H(\bar{x}) \cdot t}, \quad (1.7)$$

e se \bar{x} é uma órbita periódica, então de (1.5) também temos

$$\Delta(t) = D\phi_t(\bar{x}(0)) = P'(t) \cdot e^{B' \cdot t} \quad (1.8)$$

sendo $P'(t = 0) = I_{2n}$ (P' é periódica e B' é constante). Se τ é o período de \bar{x} , então, determinando $\phi_t(x)$ determina-se também $e^{B' \cdot \tau}$, pois $P'(\tau) = P'(0) = I_{2n}$, e consequentemente

$$e^{B' \cdot \tau} = D\phi_\tau(\bar{x}(0)) = \Delta(\tau). \quad (1.9)$$

Devido a sua grande importância na análise da estabilidade linear de problema que envolvem órbitas periódicas, a matriz $e^{B' \cdot \tau}$ é chamada de *matriz monodromia*.

A princípio, é sempre possível determinar o conjunto dos autovalores de problemas que envolvem pontos de equilíbrio. A matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ é sempre de "fácil determinação" e o seu polinômio característico é dado por (ver, por exemplo, Howard e Mackay, 1987a):

$$p(\alpha) = \det(J \cdot D^2H(\bar{x}) - \alpha I) = \alpha^{2n} + A_1\alpha^{2n-2} + A_2\alpha^{2n-4} + \dots + A_n \quad (1.10)$$

aonde os A_i são funções reais dos elementos de $J \cdot D^2H(\bar{x})$. Observa-se de imediato que este polinômio pode ser facilmente reduzido a um polinômio de grau n por meio da seguinte mudança de variáveis,

$$\rho = -\alpha^2$$

resultando no seguinte *polinômio reduzido*

$$q(\rho) = (-1)^n p(\alpha) = \rho^n - A_1\rho^{n-1} + \dots + (-1)^n A_n. \quad (1.11)$$

Também para os problemas relacionados a órbitas periódicas, nós temos uma situação um pouco parecida. O polinômio característico da matriz monodromia é dado por (ver, por exemplo, Broucke, 1969, ou Howard e Mackay, 1987b)

$$p(\lambda) = \det(\Delta(\tau) - \lambda I) = \lambda^{2n} - A_1\lambda^{2n-1} + A_2\lambda^{2n-2} - \dots + A_2\lambda^2 - A_1\lambda + 1 \quad (1.12)$$

também sendo os A_i funções dos elementos de $\Delta(\tau)$. O polinômio (1.12) também pode ser reduzido a um polinômio de grau n mediante a seguinte mudança de variáveis,

$$\rho = \lambda + \lambda^{-1}$$

o que resulta em

$$q(\rho) = \lambda^{-n} p(\lambda) = \rho^n - A'_1 \rho^{n-1} + \dots + (-1)^n A'_n \quad (1.13)$$

aonde os coeficientes A'_i de $q(\rho)$ são obtidos dos coeficientes A_i de $p(\lambda)$. Howard e Mackay, 1987b, fazem uma completa análise das raízes do polinômio (1.13). Entretanto, ao contrário do que ocorre com a matriz $J \cdot D^2 H(\bar{x})$, a determinação da matriz monodromia é de grande dificuldade. Para a maioria dos problemas encontrados, nem sempre é possível obter a expressão do fluxo $\phi_t(x)$.

DEFINIÇÃO 3: i) Se uma matriz A , $2n \times 2n$, satisfaz a relação

$$A^\dagger \cdot J \cdot A = J, \quad (1.14)$$

então A é chamada de matriz simplética (\dagger denota a matriz transposta). ii) Se uma matriz D , $2n \times 2n$, satisfaz a relação

$$D^\dagger \cdot J + J \cdot D = 0, \quad (1.15)$$

então D é chamada de matriz infinitesimalmente simplética.

PROPOSIÇÃO 2 (ver, por exemplo, Robinson, 1971, ou Abraham e Marsden, 1977): i) Seja λ um autovalor de uma matriz simplética A . Então λ^* , $1/\lambda$ e $(1/\lambda)^*$ também são autovalores de A com a mesma multiplicidade ($*$ denota o conjugado complexo). Em particular, se $\lambda = \pm 1$, então a sua multiplicidade é par. ii) Agora seja α um autovalor de uma matriz infinitesimalmente simplética D . Então α^* , $-\alpha^*$ e $-\alpha$ também são autovalores da matriz D . Em particular, se $\alpha = 0$, então a sua multiplicidade é par.

PROPOSIÇÃO 3 (ver, por exemplo, Howard e MacKay, 1987a,b): A matriz da equação variacional, $J \cdot D^2 H(\bar{x})$, é uma matriz infinitesimalmente simplética, e o matrizante, $\Delta(t)$, é uma matriz simplética.

A proposição 3 é válida não só para \bar{x} sendo um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica, mas para qualquer solução de (1.1). Se \bar{x} for um ponto de equilíbrio, então a análise da estabilidade pode ser feita sobre a matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ cujos autovalores devem satisfazer a proposição 2 item (ii). Por sua vez, se \bar{x} for uma órbita periódica, então a matriz de interesse na análise da estabilidade é a matriz monodromia, $\Delta(\tau) = e^{B' \cdot \tau}$, que, para a qual como já mencionamos, nem sempre é de possível determinação. Também, os autovalores de $\Delta(\tau)$ devem satisfazer a proposição 2, item (i). Na figura 1.1 mostramos as diversas possibilidades das disposições dos autovalores das matrizes $J \cdot D^2H(\bar{x})$ e $\Delta(\tau)$, no plano complexo.

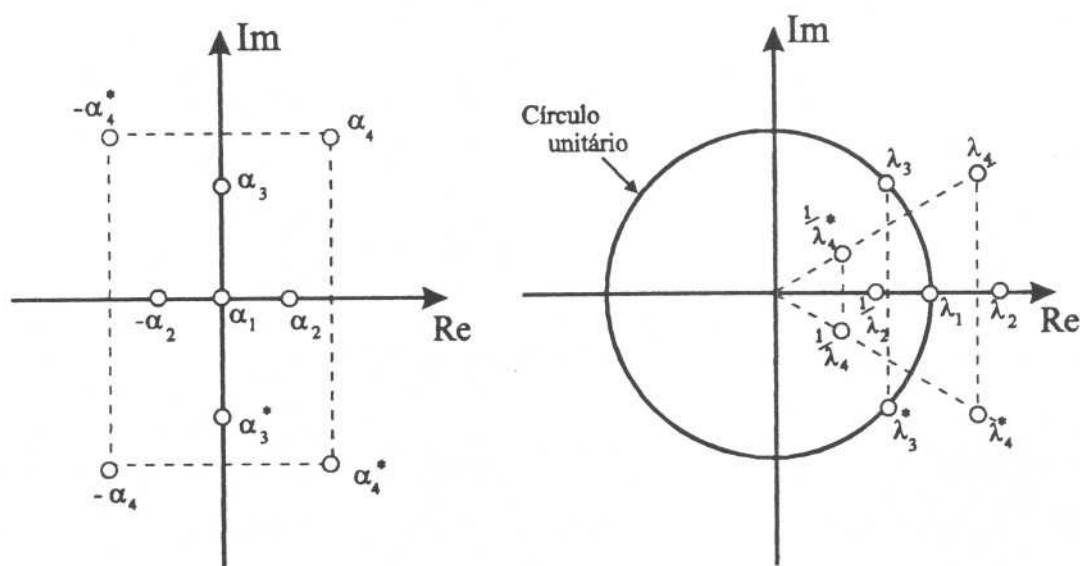


Figura 1.1: As possíveis configurações dos autovalores das matrizes $J \cdot D^2H(\bar{x})$ e $\Delta(\tau)$ no plano complexo.

1.2 Teoria de Krein.

Com a análise descrita na seção anterior podemos decidir se uma dada solução \bar{x} (ponto de equilíbrio ou órbita periódica) de um sistema como (1.1) é ou não estável linearmente. Entretanto muitas vezes a principal questão apresentada por alguns problemas é se uma dada solução estável \bar{x} poderá ou não perder esta estabilidade se uma perturbação pequena for aplicada. Ou mais especificamente, poderá uma solução estável linearmente, com um autovalor com multiplicidade maior que um, perder a sua estabilidade quando uma perturbação arbitrária e pequena passa a atuar no sistema? E o que acontece na estabilidade de uma solução estável se, sob a ação de uma pequena perturbação, dois autovalores colidem entre si?

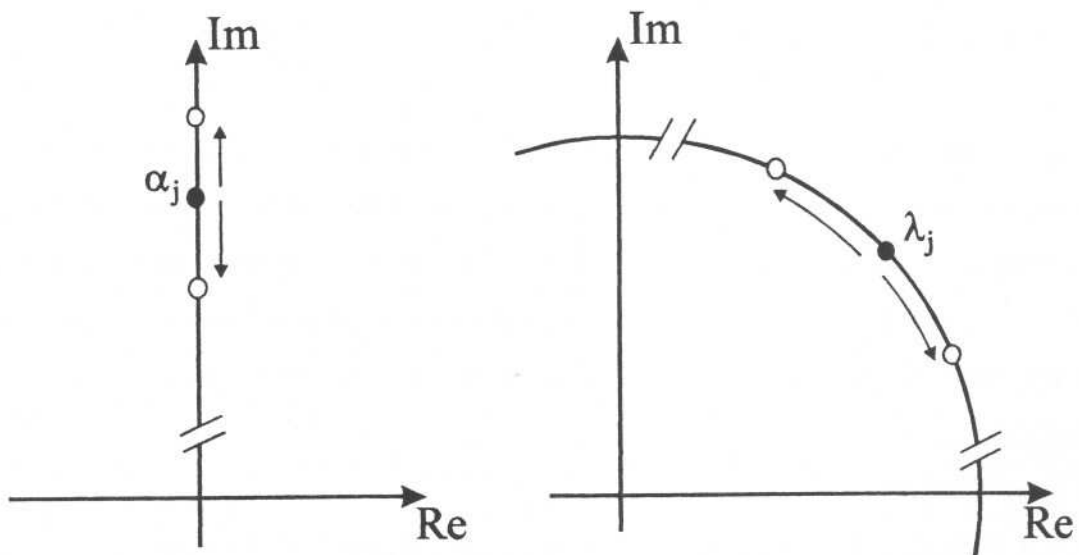


Figura 1.2: Possíveis deslocamentos dos autovalores com multiplicidade 1, submetidos a pequenas perturbações conservativas.

Evidentemente, se a perturbação a que nos referimos for não conservativa, então,

em geral, a parte real dos α_j deverá ser diferente de zero (ou os λ_j não se encontrarão sobre o círculo unitário), o que resultará sempre na perda da estabilidade da solução \bar{x} . Este tópico será abordado com mais detalhe no capítulo sobre *Perturbações Dissipativas*. Por sua vez, se a perturbação for conservativa, preservando a estrutura hamiltoniana do problema, então a resposta é menos imediata. Por exemplo, considerando uma solução estável, \bar{x} , da proposição 2 (ou figura 1.1) nós temos que uma pequena perturbação conservativa não pode deslocar um correspondente autovalor com multiplicidade um para fora do eixo imaginário (se \bar{x} for um ponto de equilíbrio) ou para fora do círculo unitário (se \bar{x} for uma órbita periódica). Como a simetria dos autovalores, estabelecida na proposição 2, deve ser mantida, o máximo que uma pequena perturbação conservativa pode fazer é produzir pequenos deslocamentos dos autovalores no eixo imagiário ou no círculo unitário, figura 1.2, desde que estes não colidam entre si, e não possuam multiplicidade maior que um.

Se mediante a ação de pequenas perturbações conservativas ocorre colisão entre autovalores ou então se autovalores com multiplicidade maior que um são perturbados por pequenas forças conservativas, para saber se a estabilidade será ou não perdida deve-se estender a análise até aos autovetores da matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ (\bar{x} sendo um ponto de equilíbrio) ou da matriz monodromia (\bar{x} sendo uma órbita periódica), via a *Teoria de Krein*.

A Teoria de Krein associa a cada autovalor α_j (ou λ_j) da matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ (ou $\Delta(\tau)$) uma assinatura, chamada de assinatura de Krein, que é determinada através do seguinte produto escalar *indefinido*,

$$\langle v_j, v_j \rangle = i(J \cdot v_j, v_j) = 2 \cdot \sum_{l=1}^n \Im(v_j^l \cdot (v_j^{l+n})^*), \quad (1.16)$$

aonde $i = \sqrt{-1}$, $(,)$ é o produto escalar usual, $v_j = (v_j^1, \dots, v_j^{2n})^\dagger$ é um autovetor de α_j (ou λ_j), e \Im corresponde a parte imaginária. Ao contrário do produto escalar usual, o produto escalar indefinido (1.16) pode ser negativo ou até mesmo igual a zero para um

autovetor não nulo.

DEFINIÇÃO 4: Se o cálculo do produto escalar indefinido sobre todo o autoespaço de α_j (ou de λ_j) tiver sempre o mesmo sinal, $\langle v_j, v_j \rangle > 0$ para todo v_j ou $\langle v_j, v_j \rangle < 0$ para todo v_j , então o respectivo autovalor é chamado de *definido positivo* ou de *definido negativo*, respectivamente. Entretanto, se em um mesmo autoespaço de α_j (ou λ_j), se para alguns autovetores ocorrer $\langle v_j, v_j \rangle > 0$ e se para outros autovetores ocorrer $\langle v_j, v_j \rangle < 0$ (ou se $\langle v_j, v_j \rangle = 0$ para algum $v_j \neq 0$), então o autovalor α_j (ou λ_j) é chamado de *indefinido* ou *do tipo misto*.

Evidentemente a determinação do tipo do autovalor pode ser feita sobre uma base qualquer do autoespaço. Portanto, com apenas um único autovetor determina-se a assinatura de um autovalor cujo autoespaço possua dimensão 1, com dois autovetores linearmente independentes determina-se a assinatura de um autovalor cujo autoespaço possua dimensão 2, e assim por diante.

Um resultado fundamental relacionado com a assinatura de autovalores, e que será muito importante na análise que faremos em capítulos subsequentes, é o seguinte:

PROPOSIÇÃO 4 (Moser, 1958 e Yakubovic e Starzhinskii, 1975): *Todo autovalor da matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ (ou $\Delta(\tau)$), com $\Re(\alpha_j) = 0$ (ou $|\lambda_j| = 1$) e multiplicidade igual a um, possui assinatura definida, positiva ou negativa.*

Como resultado imediato desta proposição nós temos que pequenas perturbações conservativas não podem mudar a assinatura do autovalor $\alpha_j \neq 0$ (ou $\lambda_j \neq 1$) com $\Re(\alpha_j) = 0$ (ou $|\lambda_j| = 1$) e multiplicidade igual a um (desde que o autovalor perturbado não colida com outro). Para uma pequena perturbação conservativa do tipo $\epsilon V(x)$ nós temos que os autovalores com multiplicidade igual a um são funções contínuas do parâmetro ϵ (ver, por exemplo, Horn e Johnson, 1985). A mudança da assinatura por meio de tal perturbação implicaria, necessariamente, na existência de um certo valor de ϵ para o

qual a assinatura do autovalor seria indefinida, o que contradiz a proposição 4, a menos que ocorra, para esse ϵ , uma colisão do autovalor α_j (ou λ_j) com outro. Entretanto, como veremos mais adiante, nem toda colisão entre autovalores definidos resulta em um autovalor do tipo indefinido. *Só as colisões entre autovalores definidos de tipos diferentes é que resultam em autovalores indefinidos. Colisões entre autovalores de mesmo tipo sempre resultam em autovalores definidos de mesma assinatura.*

Como vimos na seção anterior, \bar{x} (ponto de equilíbrio ou órbita periódica) não será estável se a parte real de algum autovalor de $J \cdot D^2H(\bar{x})$ for diferente de zero (ou se algum autovalor de $\Delta(\tau)$ localizar-se fora do círculo unitário), ou se a forma normal de Jordan de $J \cdot D^2H(\bar{x})$ (ou de B') for não-diagonal. As seguintes proposições relacionam estes fatos com a assinatura de Krein:

PROPOSIÇÃO 5 (Yakubovic e Starzhinskii, 1975): *Se a matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ (ou B') possui forma normal de Jordan não-diagonal, então $J \cdot D^2H(\bar{x})$ (ou $\Delta(\tau)$) possui pelo menos um autovalor do tipo misto.*

PROPOSIÇÃO 6 (Yakubovic e Starzhinskii, 1975): *Se um autovalor da matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ (ou $\Delta(\tau)$), possui parte real diferente de zero (ou está fora do círculo unitário), então este autovalor é do tipo misto.*

Assim, destas proposições nós temos que a instabilidade de \bar{x} está intimamente relacionada ao fato da assinatura de algum autovalor ser do tipo misto.

Os dois mais importantes resultados relacionados com as assinaturas de Krein dizem respeito a estabilidade de autovalores, com qualquer multiplicidade, e as possíveis consequências se pequenas perturbações conservativas são aplicadas. Como veremos, um é o oposto do outro:

PROPOSIÇÃO 7 (Yakubovic e Starzhinskii, 1975, e MacKay, 1986): *Se todos*

autovalores da matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$, (ou $\Delta(\tau)$), são definidos, então a matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ (ou B') possui forma normal de Jordan diagonal, e as partes reais dos autovalores α_j permanecem iguais a zero (ou os λ_j permanecem sobre o círculo unitário) sob pequenas perturbações conservativas.

PROPOSIÇÃO 8 (Moser, 1958 e MacKay, 1986): Seja α_j (ou λ_j) um autovalor da matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$, (ou $\Delta(\tau)$) do tipo indefinido. Então, (i) ou a forma normal de Jordan da matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ (ou B') é não-diagonal, ou assim ela poderá se tornar sob pequenas perturbações conservativas, (ii) e também a parte real de α_j poderá ser diferente de zero (ou λ_j poderá sair do círculo unitário) por meio da ação de pequenas perturbações conservativas.

Deste modo nós temos que, se os autovalores α_j (ou λ_j) são todos puramente imaginários (ou possuem valor absoluto igual a um) e do tipo definido, então o sistema permanecerá estável sob pequenas perturbações conservativas (desde que não ocorram colisões entre os valores de tipos diferentes). Caso contrário, da proposição 8, nós temos que, se pelo menos um autovalor é do tipo indefinido, então ou o sistema já é instável, ou poderá torna-se instável sob pequenas perturbações conservativas. Além disso, se a perturbação leva dois autovalores de tipo diferente a se colidirem, então como resultado nós temos um autovalor do tipo indefinido o que geralmente resultará na instabilidade do sistema. Na figura 1.3 nós ilustramos as possíveis consequências das colisões entre autovalores.

As proposições 7 e 8 não se aplicam aos autovalores $\alpha_j = 0$ ou $\lambda_j = 1$ (Moser, 1958, ou Yakubovic e Starzhinskii, 1975). Para estes autovalores tem-se, geralmente, uma situação instável (Moser, 1958), o que será motivo de comentários nos próximos capítulos.

A teoria de Krein apareceu em meados deste século (inicialmente estabelecida por Krein, 1950 e depois complementada por Gelfand e Linskii, 1955) para problemas envolvendo órbitas periódicas. Moser, 1958, além de estabelecer o resultado contido na

proposição 8 para órbitas periódicas, também mostrou a validade dos resultados para pontos de equilíbrio. Entretanto, os resultados acima, no que diz respeito a pontos de equilíbrio, já eram essencialmente conhecidos desde 1858 por Weierstrass, e por Wintner em 1935. Em relação aos pontos de equilíbrio lembramos que, se v_j é um autovetor de $J \cdot D^2H(\bar{x})$ correspondendo ao autovalor α_j , então v_j também será um autovetor de $e^{J \cdot D^2H(\bar{x}) \cdot t}$ correspondendo ao autovalor $e^{\alpha_j t}$ (ver, por exemplo, Hirsch e Smale, 1974).

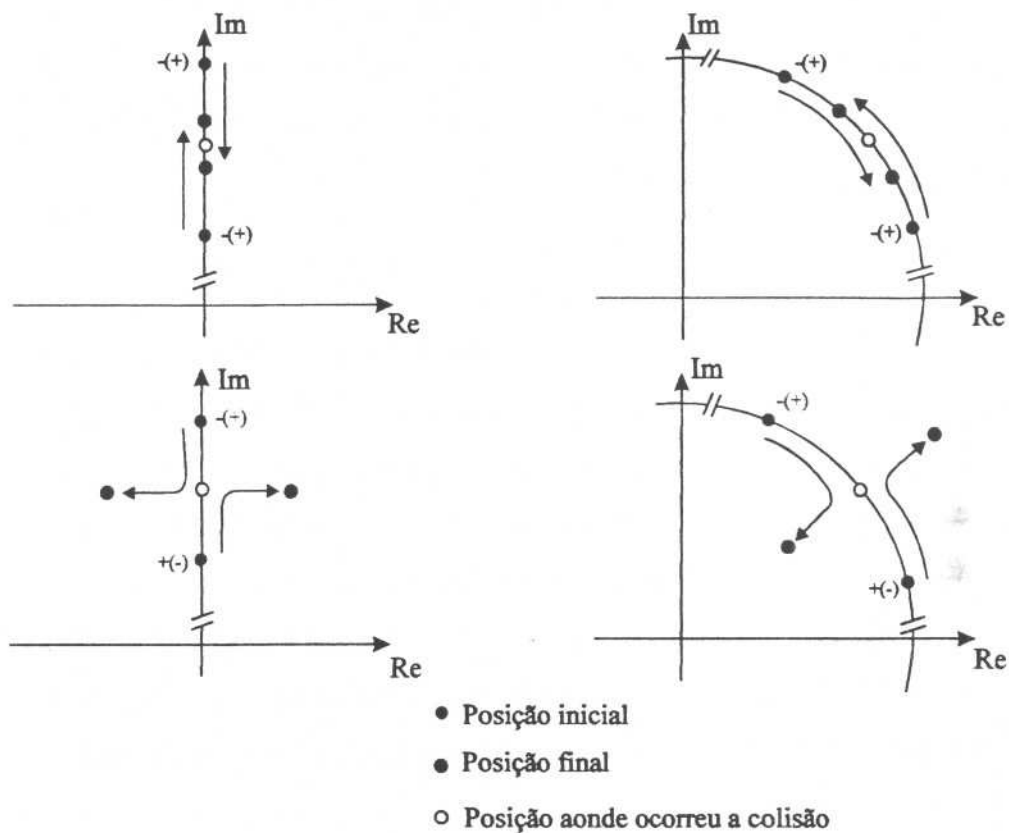


Figura 1.3: Possíveis consequências das colisões, de acordo com o tipo das assinaturas dos autovalores envolvidos. Os diagramas à esquerda correspondem aos autovalores da matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$, e os da direita correspondem aos autovalores da matriz $\Delta(\tau)$. Nelas, mostramos que as colisões entre autovalores de mesmo tipo ocorrem sem que os autovalores envolvidos "percebam" o instante da colisão (diagramas superiores) o que geralmente não ocorre se os autovalores envolvidos possuem tipos diferentes (diagramas inferiores).

E por último destacamos que a expressão (1.16) para a determinação da assinatura não é única. Por exemplo, MacKay, 1986, usa uma definição de assinatura diferente da nossa embora, como ele mesmo mostra, ambas sejam equivalentes. No nosso caso, a expressão (1.16) corresponde a forma original fornecida por Krein.

CAPÍTULO 2.

Órbitas Periódicas.

Este capítulo é inteiramente dedicado ao estudo de problemas envolvendo órbitas periódicas. Aqui, primeiramente nós apresentamos um método desenvolvido para o estudo de problemas perturbados. Antes de mostrarmos uma aplicação do método, apresentaremos um procedimento que também foi desenvolvido para a determinação de autovetores. Este procedimento, que utiliza a computação algébrica aliada com recursos numéricos, devido a sua eficiência e capacidade de tratar problemas bastantes complexos, será empregado não só neste capítulo mas também no capítulo sobre pontos de equilíbrio. E por fim, apresentamos uma aplicação deste método ao problema de dois corpos perturbado. Os resultados aqui contidos foram, em parte, previamente publicados em Cordeiro e Vieira Martins, 1992.

2.1 O Autovalor +1.

Na Mecânica Celeste muitos são os problemas descritos por hamiltonianas da forma

$$H = \sum_{j \geq 0} \epsilon^j H_j \quad (2.1)$$

aonde $|\epsilon| \ll 1$ e H_0 é a parte integrável do problema. Normalmente estes problemas são estudados separando-se a parte integrável das demais e aplicando nesta (considerando apenas H_0) a análise da estabilidade via a teoria de Krein (ver, por exemplo, Hadjidemetriou, 1982 e 1985). Entretanto sempre precisamos estender a análise até, pelo menos, $\mathcal{O}(\epsilon)$ (incluindo H_1) devido ao fato da matriz monodromia da parte integrável possuir autovalor $\lambda_j = +1$ (como também a possibilidade de possuir autovalor $\lambda_j = -1$). Isto porque a ação das perturbações H_j ($j \geq 1$) sobre os autovalores $\lambda_j = \pm 1$ poderá ser a de deslocá-los para fora do círculo unitário, fazendo com que o problema seja instável, ou então a de deslocar os mesmos autovalores para novas posições sobre o círculo unitário contribuindo assim para a estabilização do problema. Na figura 2.1

nós mostramos os possíveis deslocamentos dos autovalores $\lambda_j = \pm 1$ sob a ação destas perturbações.

De todos os termos perturbativos do hamiltoniano (2.1), o primeiro, H_1 é o mais importante. Geralmente ele é o responsável pelo maior deslocamento, $\mathcal{O}(\epsilon)$, sofrido pelos autovalores da matriz monodromia da parte integrável. Os demais termos, H_j ($j \geq 2$), produzem deslocamentos de menor magnitude, deslocando os autovalores perturbados por H_1 por quantidades de $\mathcal{O}(\epsilon^j)$ ($j \geq 2$).

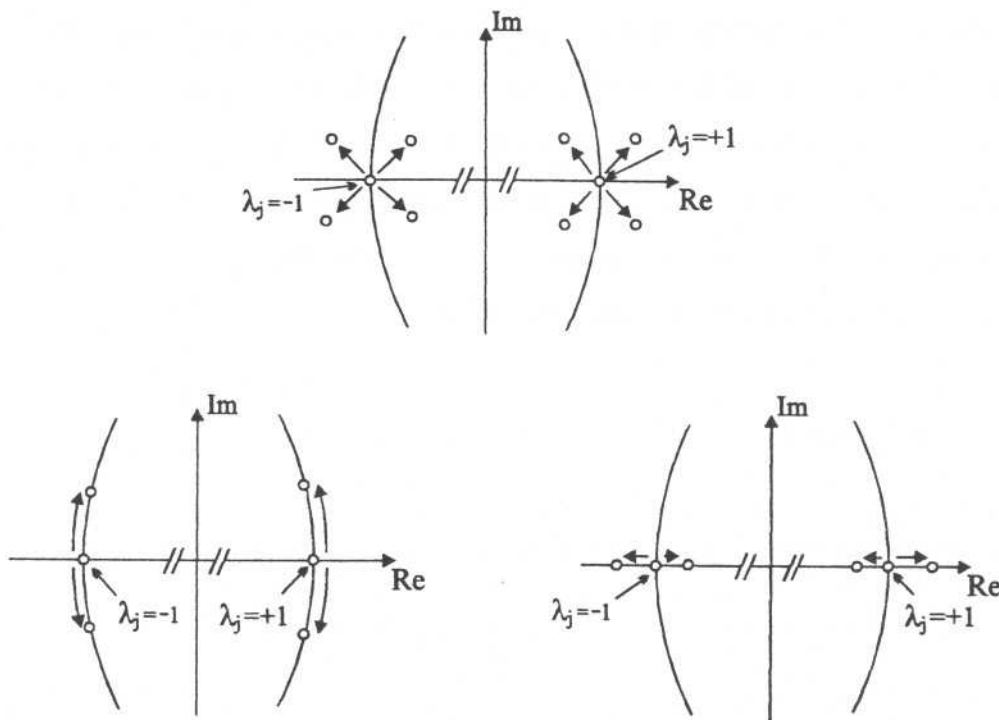


Figura 2.1: Deslocamentos dos autovalores $\lambda_j = \pm 1$ sob a ação das perturbações H_j ($j > 0$).

Evidentemente, nós podemos ter uma situação em que H_1 desloque dois autovalores com diferentes assinaturas para um mesmo quadrante do círculo unitário (o que contribuiria para estabilizar o problema), e os demais termos H_j ($j \geq 2$) produzindo uma colisão destes mesmos autovalores, resultando em uma configuração final de perda da estabilidade. De todo modo, tal possibilidade depende essencialmente da ação de H_1 sobre os autovalores ± 1 . Se os autovalores deslocados para um mesmo quadrante e sobre

o círculo unitário tiverem mesma assinatura, então a ação dos termos H_j ($j \geq 2$) não será capaz de desestabilizar o problema ao produzir uma colisão entre estes autovalores. Na figura 2.2 nós ilustramos estes fatos, considerando apenas o autovalor $+1$.

Uma questão a ser colocada é: associado aos autovalores $\lambda_j = \pm 1$ (como veremos a seguir, o autovalor $\lambda_j = +1$ sempre aparecerá em problemas envolvendo órbitas periódicas) a forma normal de Jordan da matriz B' é não-diagonal? Como já mencionamos no capítulo anterior, geralmente isto ocorre. Apesar de tais problemas serem, neste caso, instáveis linearmente, entretanto ele poderá ser estável no sentido da *estabilidade orbital*. Neste caso as órbitas vizinhas a órbita de referência \bar{x} são sempre próximas a esta, em toda a sua extensão, quando medidos através de um vetor normal a órbita \bar{x} (ver, por exemplo, Szebehely, 1984).

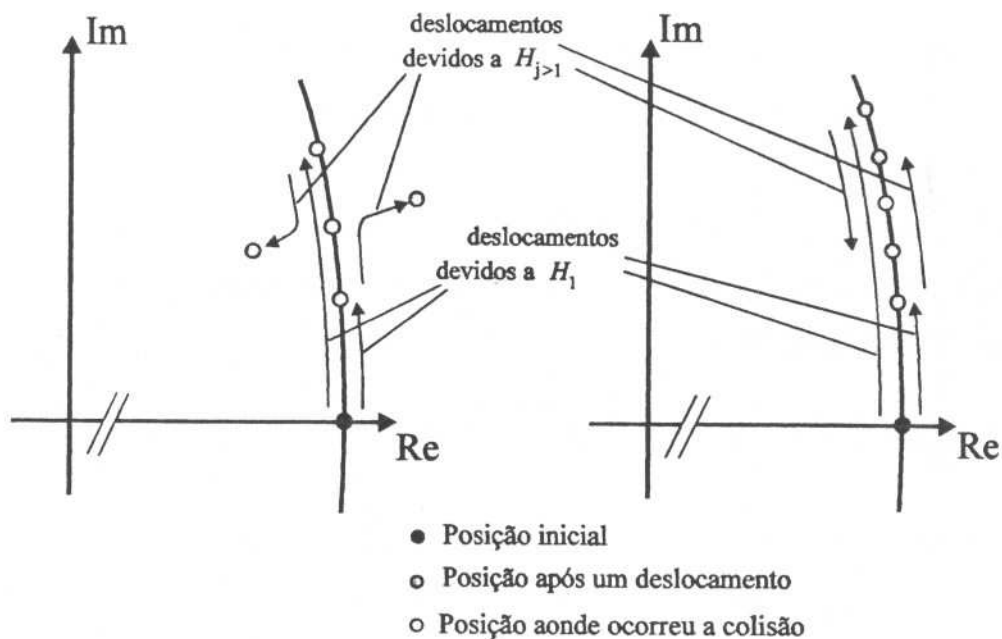


Figura 2.2: Ação das perturbações H_j ($j > 1$) sobre autovalores deslocados por H_1 sobre o círculo unitário, em um mesmo quadrante.

Um exemplo típico deste fato é o problema de dois corpos. Considerando duas órbitas descritas pelos mesmos elementos elípticos, a exceção dos semi-eixos maior que

estamos supondo serem diferentes por um pequeno valor, nós temos que, embora as longitudes médias devam ser totalmente diferentes com o decorrer do tempo, as elipses descritas, por sua vez, estarão sempre próximas uma da outra . O conceito de estabilidade orbital também será usado em alguns problemas do próximo capítulo.

Aqui, o nosso interesse reside em estudar as assinaturas dos autovalores deslocados por perturbações do tipo (2.1), principalmente quando o autovalor deslocado sobre o círculo unitário é o $\lambda_j = +1$. Evidentemente, os problemas em que os autovalores são deslocados para fora do círculo unitário não interessam por resultarem na perda da estabilidade.

Como neste capítulo \bar{x} é uma órbita periódica, o seguinte resultado mostra o porque do nosso interesse nos autovalores $\lambda_j = +1$:

PROPOSIÇÃO 1: *Para um Hamiltoniano autônomo toda matriz monodromia correspondendo a uma órbita periódica, \bar{x} , possui um autovalor +1.*

A prova desta proposição é feita a partir do fato da derivada com respeito ao tempo da solução de referência \bar{x} ser uma solução especial da equação variacional. Assim, definindo $\xi_i = \dot{\bar{x}}$, então temos

$$\frac{d}{dt}(\dot{\bar{x}}) = \frac{d}{dt}(J \cdot DH(\bar{x})) = J \cdot D^2H(\bar{x}) \cdot \dot{\bar{x}} \Rightarrow \dot{\xi}_i = J \cdot D^2H(\bar{x})\xi_i, \quad (2.2)$$

o que realmente mostra ser $\dot{\bar{x}}$ uma solução da equação variacional (a expressão (2.2) é válida para qualquer tipo de órbita de referência \bar{x}). Como \bar{x} é periódica, então nós também temos que $\xi_i = \dot{\bar{x}}$ é periódica, com o mesmo período de \bar{x} . Sabemos que (ver equações (1.5) e (1.8))

$$\xi_i(t) = \Delta(t) \cdot \xi_i(0). \quad (2.3)$$

Assim, nós temos

$$\xi_i(\tau) = \xi_i(0) \Rightarrow (\Delta(\tau) - I_{2n}) \cdot \xi_i(0) = 0, \quad (2.4)$$

resultando em (em geral $\xi_i(0)$ não é um vetor nulo)

$$\det(\Delta(\tau) - I_{2n}) = 0. \quad (2.5)$$

o que mostra que a matriz monodromia possui um autovalor $\lambda_j = +1$. Este resultado já era conhecido por Poincaré, 1892.

2.2 O Método.

O método que aqui apresentamos foi desenvolvido baseando-se nas técnicas empregadas na Teoria das Perturbações, mais especificamente no Método das Variações dos Parâmetros.

Para o hamiltoniano (2.1) nós temos que as equações do movimento são dadas por

$$\dot{x}(t) = J \cdot DH_o(x(t)) + \sum_{j \geq 1} \epsilon^j J \cdot DH_j(x(t)). \quad (2.6)$$

Se os termos perturbativos, $H_{j \geq 1}$, forem todos iguais a zero, a análise é feita considerando $\bar{x}(t)$ uma solução periódica da parte integrável. Neste caso o matrizante da equação variacional

$$\dot{\xi} = J \cdot D^2 H_o(\bar{x}(t)) \cdot \xi \quad (2.7)$$

é dado por

$$\Delta(t) = D\phi_t(\bar{x}(0)) \equiv \left[\frac{\partial \phi}{\partial x(0)} \right]_{\bar{x}(0)} \quad (2.8)$$

aonde $\phi_t(x)$ é o fluxo de $\dot{x} = J \cdot DH_o(x)$ (evidentemente nós estamos supondo ser possível a determinação da expressão do fluxo da parte integrável).

Também para o problema perturbado, aonde os termos $H_{j \geq 1}$ são diferentes de zero, nós vamos considerar a existência uma solução periódica $\bar{x}'(t)$ de período τ' (τ' não é necessariamente igual ao período da órbita não perturbada, τ), e que o fluxo, ϕ' (para o problema perturbado) possa ser representado por

$$\phi'_t(x'(0)) = \phi(t, x'_o(\epsilon, x'(0), t)) \quad (2.9)$$

aonde x'_o é tal que,

$$\epsilon = 0 \Rightarrow x'_o = x(0), \quad e \quad t = 0 \Rightarrow x'_o = x'(0). \quad (2.10)$$

A consideração que estamos fazendo aqui é de que a expressão algébrica do fluxo $\phi_t(x)$ não muda do problema integrável para o perturbado. O que muda é o fato de, no problema perturbado, \bar{x}'_o variar com o tempo enquanto no problema não-perturbado $\bar{x}(0)$ é constante. A existência da solução periódica $\bar{x}'(t)$ de (2.6) é garantida, sob algumas condições, por Poincaré, 1892 (em Pars, 1965, Coddington e Levinson, 1955, e em Hadjidemetriou, 1977, também encontram-se os mesmos resultados estabelecidos originalmente por Poincaré).

Assim, para a equação variacional do problema perturbado,

$$\dot{\xi} = \left(J \cdot D^2 H_o(\bar{x}'(t)) + \sum_{j \geq 1} \epsilon^j J \cdot D^2 H_j(\bar{x}'(t)) \right) \cdot \xi. \quad (2.11)$$

nós temos que o novo matrizante é dado por

$$\Delta(t) = \left[\frac{\partial \phi_t(x')}{\partial x'_o} \right] \cdot \left[\frac{\partial x'_o(t)}{\partial x'(0)} \right]_{\bar{x}'(0)}. \quad (2.12)$$

Expandindo x'_o em torno de $\epsilon = 0$, obtemos

$$x'_o(t) = x'(0) + \sum_{j \geq 1} \epsilon^j x'_j(t), \quad (2.13)$$

aonde $x'_j(t) = x'_j(x'(0), t)$. Assim, substituindo (2.13) em (2.12), nós temos que o matrizante da equação variacional passa a ser

$$\Delta(t) = \left[\frac{\partial \phi_t(x')}{\partial x'_o} \right] \left(I_{2n} + \sum_{j \geq 1} \epsilon^j \cdot \left[\frac{\partial x'_j(t)}{\partial x'(0)} \right]_{\bar{x}'(0)} \right). \quad (2.14)$$

Evidentemente a condição $\Delta(0) = I_{2n}$ deverá ser cumprida e, além disso, como o matrizante é derivado de um sistema hamiltoniano, então ele também deverá ser uma matriz simplética,

$$\Delta(t)^\dagger \cdot J \cdot \Delta(t) = J, \quad (2.15)$$

se todos os termos em (2.14) forem incluídos.

Considerando em (2.14) os termos até $\mathcal{O}(\epsilon)$, e levando em conta que $\left[\frac{\partial\phi_t(x')}{\partial x'_0}\right]$ é uma matriz simplética (ver comentário após a proposição 3 no capítulo anterior), de (2.15) nós temos que (novamente considerando apenas os termos até $\mathcal{O}(\epsilon)$)

$$\left[\frac{\partial x'_1(t)}{\partial x'(0)}\right]_{\bar{x}'(0)}^\dagger \cdot J + J \cdot \left[\frac{\partial x'_1(t)}{\partial x'(0)}\right]_{\bar{x}'(0)} = 0 \quad (2.16)$$

ou seja, a matriz $\left[\frac{\partial x'_1(t)}{\partial x'(0)}\right]_{\bar{x}'(0)}$ é uma matriz infinitesimalmente simplética (a menos de termos de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$). Assim, se nós representarmos

$$\left[\frac{\partial x'_1(t)}{\partial x'(0)}\right]_{\bar{x}'(0)} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

aonde os D_i ($i = 1, \dots, 4$) são matrizes $n \times n$, de (2.16) nós obtemos

$$\begin{aligned} D_4 &= -D_1^\dagger \\ D_3 &= D_3^\dagger \\ D_2 &= D_2^\dagger \end{aligned} \quad (2.18)$$

o que também é uma outra propriedade das matrizes infinitesimalmente simpléticas.

Com a exclusão dos termos de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ em (2.14) nós temos que o novo "matrizante" é simplético a menos de termos de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, ou seja,

$$\Delta(t)^\dagger \cdot J \cdot \Delta(t) = J + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.19).$$

Portanto, em relação a nova "matriz monodromia" (matriz monodromia aproximada), $\Delta(\tau')$, nós temos que, a rigor os seus autovalores não satisfazem a proposição 2, item (i), do capítulo 1 (ou figura 1.1). Entretanto, a menos de termos de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, nós podemos considera-los como cumprindo a referida proposição. Na seção 2.4 nós ilustraremos estes fatos.

2.3 Cálculo dos Autovetores.

Uma vez determinada a matriz monodromia (aproximada), $\Delta(\tau')$, nós também devemos calcular os respectivos autovalores e autovetores para podermos fazer a análise da estabilidade via a teoria de Krein. A determinação das expressões algébricas dos autovalores, como já mencionamos no capítulo anterior, restringe-se a tarefa de determinar as raízes de um polinômio de grau "n", polinômio reduzido, apesar da matriz monodromia ser uma matriz quadrada de dimensão igual a "2n". Para problemas com até quatro graus de liberdade isso é sempre possível embora, dependendo das expressões algébricas dos elementos da matriz monodromia, possa ser bastante trabalhoso: é muito comum alguns problemas apresentarem expressões demasiadamente grandes (algumas centenas de páginas) para os autovalores.

Entretanto a determinação das expressões algébricas dos autovetores tem se mostrado como o grande obstáculo encontrado neste tipo de análise da estabilidade. Como é sabido, a tarefa de determinar os autovetores de uma dada matriz resume-se na determinação das raízes de um sistema homogêneo de equações lineares cujos coeficientes são os elementos da matriz monodromia associados aos autovalores: $\Delta(\tau') - \lambda_j I_{2n}$. Como em alguns casos só os autovalores chegam a ocupar dezenas (ou até mesmo centenas) de páginas, a solução do referido sistema de equações lineares passa a ser, muitas vezes, um problema que desafia a habilidade de quem a ele se propõem resolver. Uma forma de atacar este problema é utilizando a computação algébrica. Entretanto, o uso puro e simples dos manipuladores algébricos nem sempre é de grande valia. Na maioria das vezes a solução trivial (vetor nulo) é a única resposta a ser fornecida. Isto ocorre após algumas tentativas infrutíferas, por parte dos manipuladores, na determinação de uma solução não trivial de sistema homogêneo cujo número de equações é igual ao número de incógnitas. Devido a complexidade (ou extensão) das expressões algébricas de alguns elementos da matriz $\Delta(\tau') - \lambda_j I_{2n}$, o seu determinante pode ser "interpretado" como não nulo, o que leva apenas a solução trivial.

Aqui nós apresentamos um método desenvolvido com o intuito de facilitar a determinação dos autovetores da matriz monodromia. Apesar da simplicidade do método,

ele tem se mostrado muito eficiente e pode ser, inclusive, aplicado a qualquer tipo de matriz. Além disso, um dos grandes méritos do método é o de fornecer as expressões dos autovetores de modo bastante simplificado.

Seja λ_j um autovalor da matriz $\Delta(\tau')$. Sabemos que os autovetores v_j correspondentes são obtidos resolvendo o seguinte sistema

$$(\Delta(\tau') - \lambda_j I_{2n}) \cdot v_j = 0. \quad (2.19)$$

Evidentemente tal sistema possui solução não-trivial uma vez que

$$\det(\Delta(\tau') - \lambda_j I_{2n}) = 0. \quad (2.20)$$

Assim, a matriz $(\Delta(\tau') - \lambda_j I_{2n})$ é uma matriz singular, de onde conclui-se que uma das linha (ou coluna) é uma combinação linear de outra(s). Em outras palavras, nós temos que o número de equações em (2.19) pode ser reduzido, resultando em um sistema homogêneo de equações lineares com mais incógnitas do que equações, e neste caso a existência da solução não-trivial está garantida.

Inicialmente, o procedimento a ser adotado para a determinação do autovetor v_j é excluir arbitrariamente uma das equações de (2.19), sem introduzir a expressão algébrica do autovalor λ_j (considerando nesta etapa λ_j apenas como um simples parâmetro em (2.19)). Em seguida, com o novo sistema reduzido, determina-se (de preferência via um manipulador algébrico) o autovetor (provisório) v_j . Evidentemente " λ_j " aparecerá explicitamente nas expressões algébricas das componentes de v_j . Agora, considerando λ_j como o autovalor da matriz monodromia $\Delta(\tau')$, para saber se a equação que foi excluída possui realmente uma dependência linear com as outra(s) (em outras palavras, para saber se v_j é realmente um autovetor do autovalor λ_j), deve-se dar valores numéricos para os elementos da matriz $\Delta(\tau')$ e com estes também calcular o valor de λ_j e das componentes de v_j . Finalmente, retornando com a equação que foi excluída, deve-se verificar (numericamente) se (2.19) é satisfeita. Em caso afirmativo, v_j que foi determinado pela exclusão de uma certa equação em (2.19) é um autovetor do autovalor λ_j ,

cuja expressão algébrica foi utilizada na última etapa da comprovação numérica. Por sua vez, caso (2.19) não seja confirmada, então a equação que foi excluída não possui uma dependência linear com outra equação (ou outras equações) para o autovalor em questão, λ_j , e portanto v_j não é um autovetor de λ_j . Neste caso o procedimento deve ser repetido escolhendo agora uma outra equação a ser excluída. Isto deve ser feito até a obtenção de um autovetor.

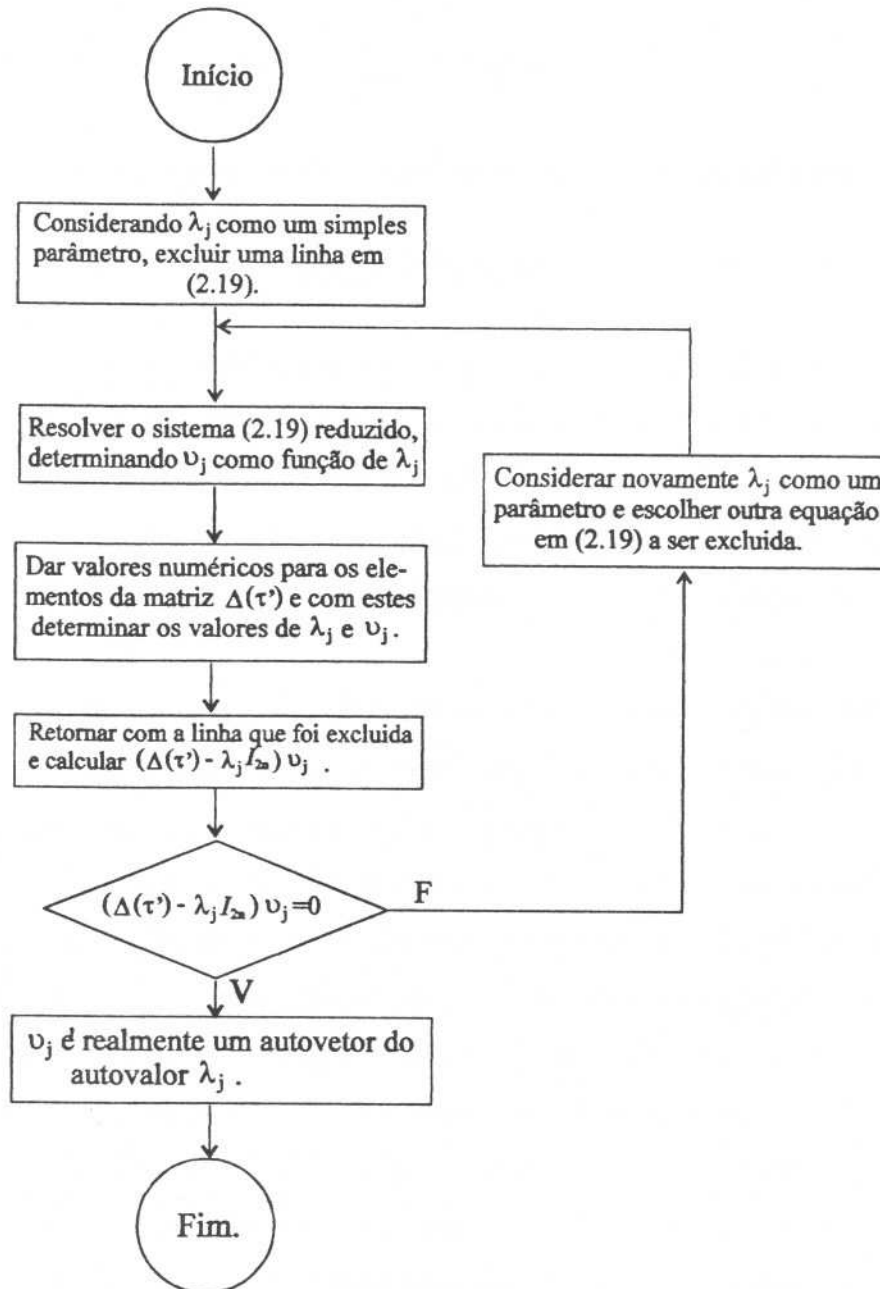


Figura 2.3: Fluxograma do método para a determinação dos autovetores v_j .

O ponto essencial do método, e que o torna eficaz em praticamente 100% dos problemas estudados, está no fato da determinação do autovetor ser feita a partir de um sistema de equações "reduzido". Para os bons manipuladores existentes é praticamente certa a determinação das soluções dos sistemas homogêneo lineares cujo o número de incógnitas é maior que o número de equações. Na figura 2.3 nós esquematizamos este método através de um fluxograma.

Para autovalores diferentes, $\lambda_j \neq \lambda_k$ ($j \neq k$), as equações a serem excluídas em (2.19) para a determinação dos autovetores não são necessariamente diferentes. Nós podemos ter casos em que autovetores de autovalores diferentes são determinados a partir da exclusão de uma mesma equação. Neste caso a independência linear dos autovetores (já que pertencem a autovalores diferentes) é resultado do fato da expressão de λ_j ser diferente de λ_k . Entretanto, quando um autoespaço de λ_j possui dimensão maior que 1, nós temos que o método também pode ser aplicado, embora neste caso haja a necessidade de se ter um certo cuidado: a determinação deve ser feita escolhendo para cada autovetor linearmente independente de λ_j , diferentes equações a serem excluídas, e tendo a certeza que as equações excluídas também são linearmente independentes entre si.

E por último nós destacamos que, como os autovetores são inicialmente determinados considerando λ_j como um parâmetro qualquer, a expressão obtida para $v_j(\lambda_j)$ é consideravelmente simplificada. Pelo modo usual de se obter os autovetores, a introdução da expressão algébrica de λ_j em (2.19) normalmente faz com que as expressões dos autovetores cheguem a ocupar até alguns milhares de páginas. Esta é também uma importante característica deste método.

2.3 Aplicação.

No capítulo 1 nós destacamos que no hamiltoniano H , x pertence ao R^{2n} . Entretanto para as variáveis do tipo ação-ângulo, nós devemos modificar o espaço do problema

em questão fazendo $x \in T^n \times R^n$, aonde T^n é o n -toro. Esta particularização em nada altera o que dissemos ou propomos neste trabalho: as análises descritas continuam sendo válidas bem como os métodos desenvolvidos tanto para o estudo do problema perturbado como para o procedimento visando a determinação dos autovetores (ver Cordeiro e Vieira Martins, 1992).

Sabemos que o problema de dois corpos pode ser expresso por variáveis do tipo ação-ângulo através das variáveis de Delaunay:

$$\underbrace{\bar{L}, \bar{G}, \bar{H}}_{\in R^3}, \underbrace{\bar{l}(t), \bar{g}, \bar{h}}_{\in T^3}, \quad (2.21)$$

e que o fluxo é dado por:

$$\phi = \begin{pmatrix} \bar{L} \\ \bar{G} \\ \bar{H} \\ \frac{\mu^2}{L^3}t + \bar{l}(0) \\ \bar{g} \\ \bar{h} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

aonde $\mu = G \cdot (m_1 + m_2)$. Como as variáveis \bar{l} , \bar{g} e \bar{h} são consideradas como estando no T^3 , então podemos fazer

$$\bar{l}(t) = \frac{\mu^2}{L^3} \text{mod}(t, \tau) + \bar{l}(0),$$

aonde $\text{mod}(t, \tau)$ (t módulo τ) significa o resto (não negativo) de $\frac{t}{\tau}$, sendo τ o período da órbita. Em *Derive - User Manual*, 1990, há uma explanação sobre a função "mod", aonde pode-se encontrar também uma expressão bastante eficiente para a sua determinação, considerando "t" e "τ" como números reais, positivos e (ou) negativos. Assim, é de imediato que o matrizante deste problema possui a seguinte expressão:

$$\Delta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{a^2}t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

sendo que "t" é na verdade $\text{mod}(t, \tau)$. Um outro meio de determinar o matrizante acima é através do hamiltoniano do problema de dois corpos nas variáveis de Delaunay:

$$H = \frac{\mu^2}{2\bar{L}^2}.$$

Neste caso nós temos que a matriz Hessiana é dada por

$$D^2H = \begin{pmatrix} \frac{3}{a^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

o que nos permite calcular diretamente o matrizante fazendo

$$\Delta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(J \cdot D^2H \cdot t)^j}{j!} = I_{2n} + J \cdot D^2H \cdot t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{a^2}t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com o intuito de simplificar a notação, nós faremos

$$\bar{L}_j \rightarrow (\bar{L}, \bar{G}, \bar{H}; j = 1, 2, 3), \quad (2.24a)$$

$$\bar{l}_j \rightarrow (\bar{l}(t), \bar{g}, \bar{h}; j = 1, 2, 3). \quad (2.24b)$$

Agora nós vamos supor que o problema de dois-corpos esteja submetidos a uma dada perturbação, e que esta nos permita representar o problema perturbado como em (2.1), satisfazendo também as condições mínimas para que possamos aplicar o método proposto neste capítulo para a análise da estabilidade. Basicamente supõem-se que exista a solução periódica $(\bar{L}'_j(t), \bar{l}'_j(t))$ e que se possa fazer aqui como o estabelecido em (2.9), (2.10) e (2.13). Assim, levando em conta (2.13), nós temos que

$$\bar{L}'_{oj} = \bar{L}'_j(0) + \sum_{i \geq 1} \epsilon^i \bar{L}'_{ji}(t), \quad (2.25a)$$

$$\bar{l}'_{oj} = \delta_{j1} \int_0^t n dt + \bar{l}'_j(0) + \sum_{i \geq 1} \epsilon^i \bar{l}'_{ji}(t). \quad (2.25b)$$

Portanto, considerando as equações acima até $\mathcal{O}(\epsilon)$, as propriedades dadas por (2.18), e também supondo que a perturbação seja tal que, até $\mathcal{O}(\epsilon)$, o semi-eixo maior,

a , não seja afetado pela perturbação (ver comentário sobre esta consideração no final deste capítulo), ou seja

$$\bar{L}'_1 = \bar{L}_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.26)$$

então nós temos finalmente a matriz monodromia (equação (2.14))

$$\Delta(\tau') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon\beta_{21} & 1 + \epsilon\beta_{22} & \epsilon\beta_{23} & 0 & \epsilon\beta_{25} & \epsilon\beta_{26} \\ \epsilon\beta_{31} & \epsilon\beta_{32} & 1 + \epsilon\beta_{33} & 0 & \epsilon\beta_{26} & \epsilon\beta_{36} \\ \frac{-3}{a^2}\tau' + \epsilon\beta_{41} & \epsilon\beta_{42} & \epsilon\beta_{43} & 1 & -\epsilon\beta_{21} & -\epsilon\beta_{31} \\ \epsilon\beta_{42} & \epsilon\beta_{52} & \epsilon\beta_{53} & 0 & 1 - \epsilon\beta_{22} & -\epsilon\beta_{32} \\ \epsilon\beta_{43} & \epsilon\beta_{53} & \epsilon\beta_{63} & 0 & -\epsilon\beta_{23} & 1 - \epsilon\beta_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

aonde os β_{ji} são:

$$\begin{aligned} \beta_{ji} &= \frac{\partial \bar{L}'_{j1}}{\partial \bar{L}'_i(0)}(\tau') & (j, i \leq 3), \\ \beta_{ji} &= \frac{\partial \bar{L}'_{j1}}{\partial \bar{L}'_{(i-3)}(0)}(\tau') & (j \leq 3, i > 3), \\ \beta_{ji} &= \frac{\partial \bar{L}'_{(j-3)1}}{\partial \bar{L}'_i(0)}(\tau') & (j > 3, i \leq 3), \\ \beta_{ji} &= \frac{\partial \bar{L}'_{(j-3)1}}{\partial \bar{L}'_{(i-3)}(0)}(\tau') & (j, i > 3). \end{aligned}$$

Os autovalores de $\Delta(\tau')$, calculados por nós por meio de manipulador algébrico, Maple V, e considerando apenas os termos até $\mathcal{O}(\epsilon)$, são

$$\lambda_{1,2} = 1, \quad (2.28a)$$

$$\lambda_{3,4} = 1 \pm \epsilon \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{f(\beta_{ji}) + \sqrt{g(\beta_{ji})}}, \quad (2.28b)$$

$$\lambda_{5,6} = 1 \pm \epsilon \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{f(\beta_{ji}) - \sqrt{g(\beta_{ji})}}, \quad (2.28c)$$

aonde

$$f = \beta_{33}^2 + \beta_{22}^2 + \beta_{36}\beta_{63} + \beta_{52}\beta_{25} + 2(\beta_{32}\beta_{23} + \beta_{53}\beta_{26})$$

e

$$g = \beta_{33}^4 + \beta_{22}^4 + \beta_{63}^2\beta_{36}^2 + \beta_{52}^2\beta_{25}^2 - 2\beta_{22}^2\beta_{33}^2 + 2\beta_{33}^2\beta_{52}\beta_{25}$$

$$\begin{aligned}
& - 2\beta_{33}^2\beta_{53}\beta_{36} - 2\beta_{22}^2\beta_{52}\beta_{25} + 2\beta_{22}\beta_{63}\beta_{36} \\
& + 2\beta_{52}\beta_{25}\beta_{63}\beta_{36} + 4\beta_{33}^2\beta_{53}\beta_{26} + 4\beta_{33}^2\beta_{32}\beta_{23} \\
& + 4\beta_{22}^2\beta_{53}\beta_{25} + 4\beta_{22}^2\beta_{32}\beta_{23} - 4\beta_{32}^2\beta_{63}\beta_{25} \\
& - 4\beta_{23}^2\beta_{52}\beta_{36} + 4\beta_{26}^2\beta_{52}\beta_{53} + 4\beta_{53}^2\beta_{25}\beta_{36} \\
& + 4\beta_{32}\beta_{23}\beta_{52}\beta_{25} + 4\beta_{63}\beta_{36}\beta_{32}\beta_{23} + 4\beta_{53}\beta_{26}\beta_{52}\beta_{25} \\
& + 4\beta_{63}\beta_{36}\beta_{53}\beta_{26} + 8\beta_{33}\beta_{52}\beta_{23}\beta_{25} - 8\beta_{22}\beta_{53}\beta_{25}\beta_{33} \\
& + 8\beta_{22}\beta_{63}\beta_{26}\beta_{32} + 8\beta_{33}\beta_{32}\beta_{53}\beta_{25} + 8\beta_{22}\beta_{33}\beta_{32}\beta_{23} \\
& + 8\beta_{22}\beta_{33}\beta_{53}\beta_{36}.
\end{aligned}$$

Ao longo deste trabalho nós convencionaremos que os subíndices pares correspondem aos autovalores cujas partes imaginárias sejam menores ou iguais a zero, e os subíndices ímpares aos autovalores cujas partes imaginárias sejam maiores ou iguais a zero:

$$\Im(\lambda_{1,3,5}) \geq 0,$$

$$\Im(\lambda_{2,4,6}) \leq 0.$$

Também nós chamamos a atenção para os autovalores $\lambda_{1,2} = 1$. Eles são exatamente os autovalores que satisfazem a proposição 1.

Para aplicarmos a análise da estabilidade, via a teoria de Krein, a este problema, obviamente nós primeiro devemos verificar para quais valores dos elementos β_{ji} os autovalores $\lambda_{3,4,5,6}$ estarão sobre o círculo unitário: $|\lambda_{3,4,5,6}| = 1$. Mas das expressões (2.28b) e (2.28c) observa-se que isto só acontecerá se $f = g = 0$, o que implica em $\lambda_{3,4,5,6} = +1$. Como foi mencionado no capítulo 1, para estes autovalores nós temos uma situação que é geralmente instável, além do fato de não ser definida a determinação de suas assinaturas. Entretanto se os β_{ji} são tais que $\sqrt{f \pm \sqrt{g}}$ são puramente imaginários, então nós podemos considerar que, a menos de termos de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, os autovalores $\lambda_{3,4,5,6}$ estão sobre o círculo unitário. Neste caso estes autovalores são os autovalores $\lambda_{3,4,5,6} = +1$ da matriz não perturbada (2.23) que foram deslocados no plano complexo,

pelas perturbações, em direções paralelas ao eixo imaginário. Como estes deslocamentos são de $\mathcal{O}(\epsilon)$, então as distâncias destes autovalores ao círculo unitário serão de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ (ver figura 2.4).

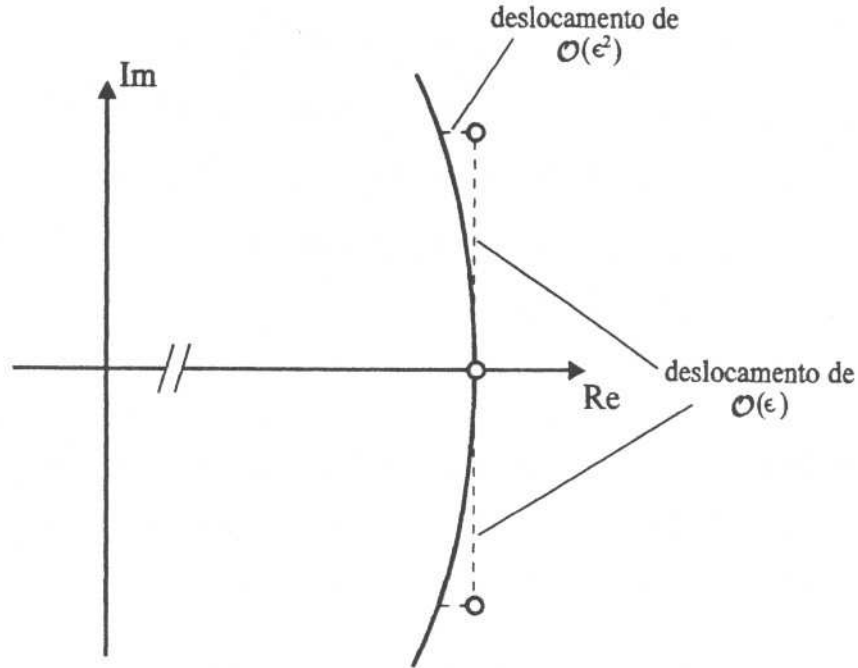


Figura 2.4: Posição dos autovalores $\lambda_{3,4}$ no plano complexo.

Das expressões de f e g nós temos que são 11 as variáveis β_{ji} envolvidas neste problema. Evidentemente uma análise em uma espaço de tal dimensão não é uma tarefa fácil de ser feita. Apesar desta dificuldade, podemos obter informações a respeito de algumas interessantes características relacionadas a assinaturas dos autovalores $\lambda_{3,4,5,6}$.

Considerando apenas os autovalores do primeiro quadrante, $\lambda_{3,5}$, para os autovetores nós temos que

$$v_{3,5} = (0, x_{3,5}^1 \cdot x_{3,5}^2, z, 1, x_{3,5}^4)^{\dagger} \quad (2.29)$$

aonde $z \in \mathbb{C}$ e

$$\Re(x_{3,5}^1) = \frac{r_{11}(\beta_{ji}) + r_{12}(\beta_{ji})(f \pm \sqrt{g})}{k_{3,5}(\beta_{ji})},$$

$$\begin{aligned}\Im(x_{3,5}^1) &= \sqrt{|f \pm \sqrt{g}|} \left(\frac{i_{11}(\beta_{ji}) + i_{12}(\beta_{ji})(f \pm \sqrt{g})}{k_{3,5}(\beta_{ji})} \right), \\ \Re(x_{3,5}^2) &= \frac{r_{21}(\beta_{ji}) + r_{22}(\beta_{ji})(f \pm \sqrt{g})}{k_{3,5}(\beta_{ji})}, \\ \Im(x_{3,5}^2) &= \sqrt{|f \pm \sqrt{g}|} \left(\frac{i_{21}(\beta_{ji})}{k_{3,5}(\beta_{ji})} \right), \\ \Re(x_{3,5}^4) &= \frac{r_{41}(\beta_{ji}) + r_{42}(\beta_{ji})(f \pm \sqrt{g})}{k_{3,5}(\beta_{ji})}, \\ \Im(x_{3,5}^4) &= \sqrt{|f \pm \sqrt{g}|} \left(\frac{i_{41}(\beta_{ji})}{k_{3,5}(\beta_{ji})} \right),\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}r_{11} &= 4(\beta_{33}^2\beta_{22} + \beta_{36}\beta_{63}\beta_{22} - \beta_{33}\beta_{32}\beta_{23} \\ &\quad - \beta_{53}\beta_{36}\beta_{23} - \beta_{63}\beta_{32}\beta_{26} + \beta_{53}\beta_{33}\beta_{26}), \\ r_{12} &= -2\beta_{22}, \\ i_{11} &= 2\sqrt{2}(\beta_{32}\beta_{23} + \beta_{53}\beta_{26} + \beta_{33}^2 + \beta_{63}\beta_{36}), \\ i_{12} &= -\sqrt{2}, \\ r_{21} &= -4(-\beta_{23}\beta_{32}^2 - \beta_{23}\beta_{52}\beta_{36} + \beta_{33}\beta_{32}\beta_{22} \\ &\quad + \beta_{33}\beta_{52}\beta_{26} + \beta_{53}\beta_{36}\beta_{22} - \beta_{53}\beta_{32}\beta_{26}), \\ r_{22} &= -2\beta_{32}, \\ i_{21} &= -2\sqrt{2}(\beta_{32}\beta_{22} + \beta_{52}\beta_{26} + \beta_{33}\beta_{32} + \beta_{53}\beta_{36}), \\ r_{41} &= -4(\beta_{63}\beta_{32}\beta_{22} - \beta_{33}\beta_{53}\beta_{22} - \beta_{53}\beta_{32}\beta_{23} \\ &\quad + \beta_{52}\beta_{33}\beta_{23} + \beta_{63}\beta_{52}\beta_{26} - \beta_{53}^2\beta_{26}), \\ r_{42} &= -2\beta_{53}, \\ i_{41} &= -2\sqrt{2}(\beta_{53}\beta_{22} - \beta_{52}\beta_{23} - \beta_{53}\beta_{33} + \beta_{53}\beta_{26}), \\ k_{3,5} &= k_1(\beta_{ji}) + k_2(\beta_{ji})(f \pm \sqrt{g}),\end{aligned}$$

e, em $k_{3,5}$, nós temos que as funções k_1 e k_2 são dadas por

$$\begin{aligned}k_1 &= -8\beta_{53}\beta_{33}\beta_{32} + 4\beta_{52}\beta_{33}^2 + 4\beta_{63}\beta_{52}\beta_{36} - 4\beta_{53}^2\beta_{36} + 4\beta_{63}\beta_{32}^2, \\ k_2 &= -2\beta_{52}.\end{aligned}$$

Obviamente, para o autovalor λ_3 nós adotamos o sinal positivo que aparece em $f \pm \sqrt{g}$, e para o autovalor λ_5 o sinal negativo.

O produto escalar indefinido correspondente é dado por:

$$\langle v_{3,5}, v_{3,5} \rangle = \frac{\pm \sqrt{|f + \sqrt{g}|}}{(k_{3,5})^2} P_{3,5}(\beta_{ji}) \quad (2.30)$$

aonde $P_{3,5}$ são funções reais, sendo que

$$P_{3,5} = A(\beta_{ji})(f \pm \sqrt{g})^2 + B(\beta_{ji})(f \pm \sqrt{g}) + C(\beta_{ji}) \quad (2.31)$$

aonde

$$A = i_{12}k_2,$$

$$B = i_{11}k_2 + i_{12}k_1 + r_{42}i_{21} - i_{41}r_{22},$$

$$C = i_{11}k_1 + r_{41}i_{21} - i_{41}r_{21}.$$

Da equação (2.30) conclui-se, de imediato, que as funções P_i são as únicas responsáveis pelos sinais de $\langle v_i, v_i \rangle$, e também de (2.30) e (2.31) tem-se que os sinais de $\langle v_3, v_3 \rangle$ e $\langle v_5, v_5 \rangle$ dependem essencialmente do "coeficiente" A e das "raízes"

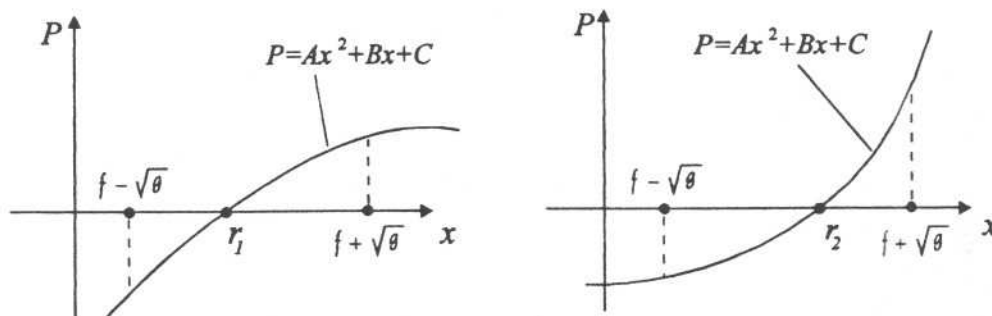
$$r_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

O que queremos dizer é que, quando somente uma das raízes, r_1 ou r_2 , está entre $(f - \sqrt{g})$ e $(f + \sqrt{g})$, então nós temos que os autovalores λ_3 e λ_5 possuem assinaturas diferentes. Por sua vez, se nenhuma das raízes se encontra entre $(f - \sqrt{g})$ e $(f + \sqrt{g})$, ou se as duas se encontram entre $(f - \sqrt{g})$ e $(f + \sqrt{g})$, então nós temos que os autovalores possuem a mesma assinatura (ver figura 2.5). Evidentemente os valores de A , B , C , $(f - \sqrt{g})$ e $(f + \sqrt{g})$ (e consequentemente de r_1 e r_2) são determinados pelos elementos β_{ji} da matriz modromia perturbada.

É interessante observar que se a perturbação está modificando os valores dos elementos β_{ji} , a colisão entre λ_3 e λ_5 só ocorrerá quando $g = 0$ ($\lambda_3 = \lambda_5$). Se os autovalores

λ_3 e λ_5 tinham assinaturas diferentes antes da colisão, então conclui-se também que nesta colisão $f = r_1$ ou $f = r_2$, uma vez que o autovalor resultante possui assinatura indefinida. Já tal fato necessariamente não ocorrerá se os autovalores possuíam a mesma assinatura. Se também considerarmos $f = r_1$ ou $f = r_2$ no instante da colisão, então o autovalor resultante será do tipo indefinido, enquanto deveria ser do tipo definido já que os autovalores envolvidos são do mesmo tipo. Isto nos leva também a concluir que para $g \neq 0$, ($\lambda_3 \neq \lambda_5$), jamais teremos $(f + \sqrt{g}) = r_1$ ou $(f + \sqrt{g}) = r_2$ ou $(f - \sqrt{g}) = r_1$ ou $(f - \sqrt{g}) = r_2$, pois quaisquer uma destas condições implica em um autovalor de multiplicidade igual a 1 com assinatura indefinida e, como mencionamos no capítulo 1, isto não é permitido.

Exemplos em que λ_3 e λ_5 possuem assinaturas diferentes



Exemplos em que λ_3 e λ_5 possuem assinaturas iguais

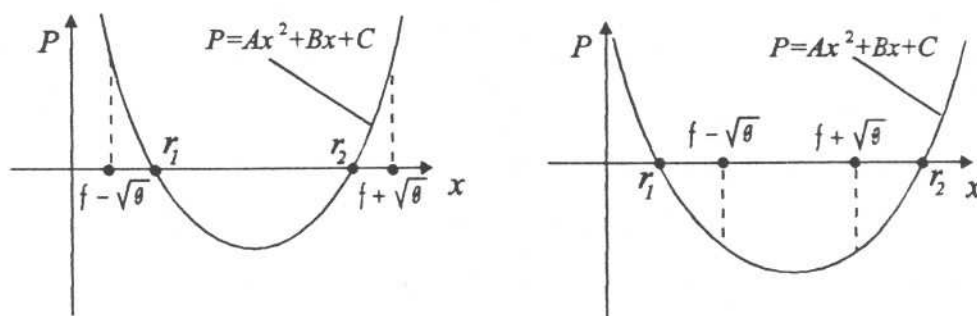


Figura 2.5: Relação das posições das raízes r_1 e r_2 com assinatura do autovalores λ_3 e λ_5 . Aqui estamos supondo que $r_1 \leq r_2$.

E finalmente, supondo agora uma pequena perturbação extra atuando sobre o problema, para r_1 ou r_2 pertencendo ao intervalo $((f - \sqrt{g}), (f + \sqrt{g}))$, uma colisão entre λ_3 e λ_5 produzida por esta perturbação poderá resultar na instabilidade do problema. Caso contrário, se r_1 e r_2 não pertencem ao intervalo $((f - \sqrt{g}), (f + \sqrt{g}))$, ou se ambos pertence a ele, então a pequena perturbação não será capaz de instabilizar o problema ao colidir estes mesmos autovalores.

Os resultados acima são válidos, como já dissemos, para perturbações que não afetem, até $\mathcal{O}(\epsilon)$, o semi-eixo maior da órbita. Em alguns casos isto só ocorre se considerarmos apenas o efeito secular da perturbação sobre "a". Como exemplos deste fato nós temos o movimento dos satélites artificiais em torno de planetas esferoidal oblatos (Brouwer, 1959) ou até mesmo em torno de planetas oblatos, considerando neste caso a elipsidade do equador do planeta (Izsak, 1961). O estudo considerando os termos de curto e longo período da perturbação sob \bar{L}_1 também é possível. Neste caso, no cálculo de $\frac{\partial \bar{l}'_1}{\partial L'_1(0)}(\tau')$ deve-se lembrar que

$$\bar{l}'_1 = \int_0^t n dt + \bar{l}'_1(0) + \sum_{i \geq 1} \epsilon^j \bar{l}'_{1i}(t),$$

aonde

$$n = \frac{\mu^2}{\bar{L}'_1{}^3(t)} = \frac{\mu^2}{(\bar{L}'_1(0) + \sum_{i \geq 1} \epsilon^j \bar{L}'_{1i}(t))^3},$$

além de termos que somar aos elementos da primeira linha e quarta coluna da matriz (2.27) os correspondentes termos $\epsilon \beta_{ji}$ que neste caso não são necessariamente nulos. Deste modo, nós temos que muitos são os problemas que podem ser objetos do método proposto. Apesar de termos apenas mencionado o estudo envolvendo satélites artificiais, como tema a ser objeto do método desenvolvido, ele também pode ser aplicado a problemas abordados pela teoria planetária.

CAPÍTULO 3.

Pontos de Equilíbrio para Potenciais Genéricos.

Neste capítulo nós estudamos os problemas com até 3 graus de liberdade, possuindo pontos de equilíbrio. O sistema de referência adotado é sempre não inercial (situações aonde normalmente aparecem os pontos de equilíbrio na Astronomia) e expresso em coordenadas esféricas. A escolha deste sistema de coordenadas se deve não só ao fato deste ser um sistema natural para vários problemas (aqueles que apresentam simetria espacial esférica) mas também porque nele a equação variacional assume uma forma mais simplificada. Este estudo é feito para potenciais genéricos, aonde determinamos as expressões algébricas de todos os seus autovalores, autovetores e as respectivas assinaturas. Os resultados aqui contidos também podem ser encontrados em Cordeiro e Vieira Martins, 1994.

3.1 pontos de equilíbrio de Potenciais em Rotação.

Em coordenadas esféricas nós temos que o lagrangeano por unidade de massa para um pequeno corpo movendo através de um potencial U , considerando um sistema de referência inercial, é expresso por (ver, por exemplo, Landau e Lifshitz, 1978)

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) \dot{\phi}^2 \right) - U(r, \theta, \phi, t), \quad (3.1)$$

Os respectivos momentos canônicos são dados por

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \\ P_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}, \\ P_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \text{sen}^2(\theta) \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

cujo correspondente hamiltoniano, também por unidade de massa, é

$$H = \frac{1}{2} \left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\phi^2}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \right) + U(r, \theta, \phi, t). \quad (3.3)$$

Obviamente a dependência temporal do potencial U só ocorrerá se a massa (ou a distribuição de massa) do corpo (ou dos corpos), a que se refere o potencial, estiver em movimento em relação ao sistema de referência adotado (inercial). Este é o caso do *problema restrito de três corpo*, PRTC, e do potencial de um corpo *oblato* ou *prolato*, em rotação.

Aqui nós vamos considerar um sistema de referência que está girando com uma frequência $\omega > 0$ em torno do eixo "z" (eixo ao qual se refere a variável θ), no mesmo sentido do ângulo ϕ . Neste caso, é de imediato que podemos fazer

$$U(r, \theta, \phi, t) = U(r, \theta, \phi') \quad (3.4)$$

aonde

$$\phi' = \phi - \omega t. \quad (3.5)$$

Neste caso, para o novo momento temos que

$$P_{\phi'} = r^2 \text{sen}^2(\theta)(\dot{\phi}' + \omega), \quad (3.6)$$

o respectivo hamiltoniano (autônomo e por unidade de massa) é dado por

$$H = \frac{1}{2} \left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_{\phi'}^2}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \right) + U(r, \theta, \phi') - \omega P_{\phi'}. \quad (3.7)$$

Este é o hamiltoniano expresso em coordenadas do tipo esféricas, para um pequeno corpo considerando agora um sistema de referência não inercial.

As equações do movimento (de Hamilton), equação (1.1), referente a (3.7) são

$$\dot{r} = P_r, \quad (3.8a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{r^2}, \quad (3.8b)$$

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} - \omega, \quad (3.8c)$$

$$\dot{P}_r = \frac{P_\theta^2}{r^3} + \frac{P_\phi^2}{r^3 \text{sen}^2(\theta)} - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (3.8d)$$

$$\dot{P}_\theta = \frac{P_\phi^2 \cos(\theta)}{r^2 \text{sen}^3(\theta)} - \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad (3.8e)$$

$$\dot{P}_\phi = -\frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad (3.8f)$$

aonde, por conveniência, foram eliminadas as plicas (') na variável ϕ .

Como sabemos, os pontos de equilíbrio são as soluções do sistema

$$J \cdot DH(x) = 0 \quad (3.9)$$

aonde no nosso caso, $x = (r, \theta, \phi, P_r, P_\theta, P_\phi)^\dagger$. Assim, das equações (3.8) nós temos de imediato que

$$P_r = 0, \quad (3.10a)$$

$$P_\theta = 0, \quad (3.10b)$$

$$P_\phi = r^2 \omega \text{sen}^2(\theta), \quad (3.10c)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = r \omega^2 \text{sen}^2(\theta), \quad (3.10d)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \text{sen}(2\theta), \quad (3.10e)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = 0, \quad (3.10f)$$

de onde conclui-se que o ponto de equilíbrio é dado por

$$\bar{x} = (\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}, 0, 0, \bar{r}^2 \omega \text{sen}^2(\bar{\theta}))^\dagger. \quad (3.11)$$

Portanto a determinação de \bar{r} , $\bar{\theta}$ e $\bar{\phi}$, e conseqüentemente de \bar{x} , é feita resolvendo simultaneamente apenas as equações (3.10d), (3.10e) e (3.10f).

Uma vez determinado o ponto de equilíbrio \bar{x} , determina-se também a matriz da equação variacional, que para o hamiltoniano (3.7) é dada por

$$J \cdot D^2 H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ b & d & 0 & 0 & 0 & e \\ c & h & l & 0 & 0 & -b \\ h & f & k & 0 & 0 & -d \\ l & k & g & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

aonde

$$a = \frac{1}{\bar{r}^2}, \quad (3.13a)$$

$$b = \frac{-2\omega}{\bar{r}}, \quad (3.13b)$$

$$c = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{\bar{x}} - 3\omega^2 \text{sen}^2(\bar{\theta}), \quad (3.13c)$$

$$d = -2\omega \cot(\bar{\theta}), \quad (3.13d)$$

$$e = \frac{1}{\bar{r}^2 \text{sen}^2(\bar{\theta})}, \quad (3.13e)$$

$$f = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\bar{x}} - \bar{r}^2 \omega^2 (2 + \cos(2\bar{\theta})), \quad (3.13f)$$

$$g = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right|_{\bar{x}}, \quad (3.13g)$$

$$h = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \right|_{\bar{x}} - \bar{r}^2 \omega^2 \text{sen}(2\bar{\theta}), \quad (3.13h)$$

$$k = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \phi} \right|_{\bar{x}}, \quad (3.13i)$$

$$l = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \phi} \right|_{\bar{x}}. \quad (3.13j)$$

Como a matriz $J \cdot D^2 H(\bar{x})$ é infinitesimalmente simplética, então de (3.12) constata-se que a propriedade dada por (2.18) aqui também se aplica, aonde no presente caso

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & d & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.14a)$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad (3.14b)$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} c & h & l \\ h & f & k \\ l & k & g \end{pmatrix}. \quad (3.14c)$$

3.2 O Potencial $U(r)$.

Este é o mais simples de todos os tipos de potenciais e conseqüentemente o mais fácil de analisar. Como exemplos nós temos o potencial gravitacional de corpo de massa M , pontual ou com simetria esférica,

$$U = - \frac{G \cdot M}{r}, \quad (3.15)$$

e também os potenciais que variam com o inverso da n -ésima potência da distância (n sendo um número real positivo qualquer), ou seja

$$U = -\frac{\mu}{r^n}, \quad (3.16)$$

aonde μ é uma constante.

A determinação dos pontos de equilíbrio é feita a partir da equação (3.10e) de onde se obtém

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \text{sen}(2\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{n'\pi}{2}, \quad (3.17)$$

com $n' = 0, 1, 2$. Entretanto para $n' = 0, 2$ nós obtemos que

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad U = \text{constante}, \quad (3.18)$$

o que nos leva a considerar aqui apenas os pontos de equilíbrio equatoriais ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Neste caso, também da equação (3.10d) nós concluimos que

$$\frac{\partial U}{\partial r} = r\omega^2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = r\omega^2, \quad (3.19)$$

o que é uma generalização da terceira lei de Kepler para um potencial $U(r)$ genérico.

Assim, o ponto de equilíbrio é dado por

$$\bar{x} = (\bar{r}, \frac{\pi}{2}, \bar{\phi}, 0, 0, \bar{r}^2\omega)^\dagger, \quad (3.20)$$

aonde \bar{r} é solução de (3.19) e $\bar{\phi}$ pode assumir qualquer valor em $[0, 2\pi)$.

Para a matriz (3.12), levando em conta o fato de \bar{x} ser um ponto equatorial, tem-se que

$$J \cdot D^2H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

aonde

$$e = a, \quad (3.22a)$$

$$c = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{\bar{x}} - 3\omega^2, \quad (3.22b)$$

$$f = - \bar{r}^2 \omega^2, \quad (3.22c)$$

Os autovalores da matrix (3.21) são

$$\alpha_{1,2} = 0, \quad (3.23a)$$

$$\alpha_{3,4} = \pm \sqrt{af} = \pm \omega i, \quad (3.23b)$$

$$\alpha_{5,6} = \pm \sqrt{c} = \pm \sqrt{\left(\left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{\bar{r}} + 3\omega^2 \right)} i. \quad (3.23c)$$

Nós lembramos que para estes autovalores, como também para os demais deste capítulo, é válida a convenção estabelecida no capítulo anterior aonde definimos que os subíndices pares correspondem aos autovalores cujas partes imaginárias sejam menores ou iguais a zero e os subíndices ímpares aos autovalores cujas partes imaginárias sejam maiores ou iguais a zero.

Em (3.23c) nós estamos considerando $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{\bar{r}} + 3\omega^2 > 0$ (caso contrário, $\alpha_{5,6} \in \mathbb{R}$ fazendo com que o \bar{x} seja instável). Também, geralmente nós temos que os autovalores $\alpha_{1,2} = 0$ estão associados a termos seculares nas soluções da equação variacional. Mas, de modo análogo ao que mencionamos no capítulo anterior, seção 2.1, o conceito de estabilidade linear será substituído pelo da estabilidade orbital. Para os problemas deste capítulo, a determinação da estabilidade orbital é feita substituindo a idéia de vizinhança de um ponto \bar{x} , que no caso da estabilidade linear pode ser considerada como uma esfera com centro em \bar{x} , por um toro gerado pela rotação da referida esfera em torno do eixo z , figura 3.1. Assim, se existir um toro deste tipo tal que, para toda órbita que parte ($t = 0$) de um ponto muito próximo de \bar{x} , se ela permanecer dentro deste toro para todo o tempo ($t \in (-\infty, +\infty)$), então neste caso \bar{x} será considerada como *estável*. Portanto, para o potencial $U(r)$ a palavra estabilidade significa estabilidade orbital. Este mesmo

conceito também será aplicado para o estudo do próximo potencial, $U(r, \theta)$, na próxima seção.

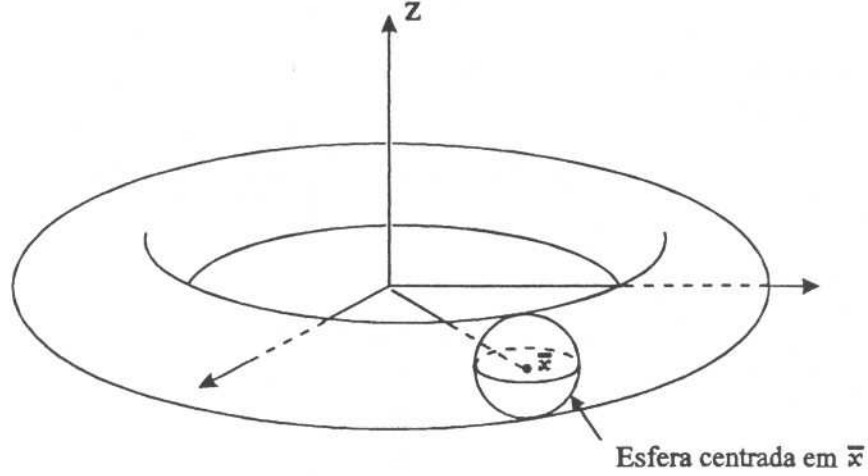


Figura 3.1. Toro gerado pela rotação da esfera centrada em \bar{x} .

Os autovetores de α_3 , obtido por nós, são dados por

$$v_3 = (0, z, 0, 0, \alpha_3 \bar{r}^2 z, 0)^\dagger, \quad (3.24)$$

cuja assinatura é

$$\langle v_3, v_3 \rangle = -2|z|^2 |\alpha_3| \bar{r}^2 = -2|z|^2 \omega \bar{r}^2 < 0, \quad (3.25)$$

aonde $z \in \mathbb{C}$. Desta forma nós temos que α_3 possui assinatura definida negativa. Como $\alpha_4 = \alpha_3^* = -\alpha_3$ então da expressão para o cálculo dos autovetores obtemos

$$((J \cdot D^2 H(\bar{x}) - \alpha_3 I_{2n}) \cdot v_3)^* = (J \cdot D^2 H(\bar{x}) - \alpha_4 I_{2n}) \cdot v_3^* = 0, \quad (3.26)$$

de onde conclui-se que v_3^* é autovetor de α_4 , ($v_4 = v_3^*$), e de (1.16) deduz-se também que

$$\begin{aligned} \langle v_4, v_4 \rangle &= 2 \sum_{l=1}^n \Im(v_4^l (v_4^{l+n})^*) = 2 \sum_{l=1}^n \Im\left((v_3^l (v_3^{l+n})^*)^*\right) \\ &= -2 \sum_{l=1}^n \Im(v_3^l (v_3^{l+n})^*) = -\langle v_3, v_3 \rangle > 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

ou seja, α_4 possui assinatura definida positiva.

Para o autovalor α_5 , os correspondentes autovetores são

$$v_5 = (z, 0, \frac{-2\omega}{r\alpha_5} z, \alpha_5 z, 0, 0)^\dagger. \quad (3.28)$$

cuja assinatura é dada por

$$\langle v_5, v_5 \rangle = -2|z|^2|\alpha_5| = -2|z|^2 \sqrt{\left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{\bar{r}}} + 3\omega^2 < 0. \quad (3.29)$$

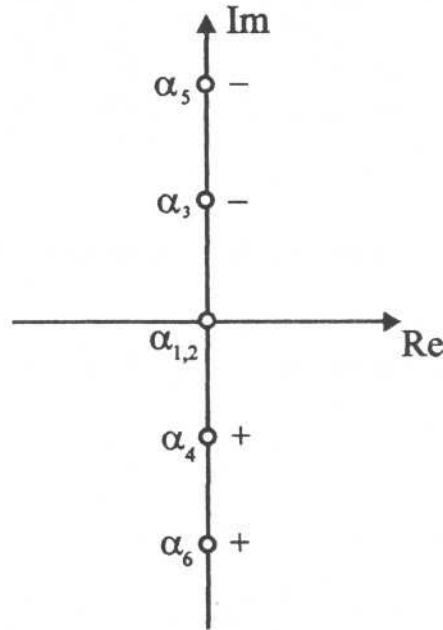


Figura 3.2: Assinaturas dos autovalores $\alpha_{1,\dots,6}$ do potencial genérico $U(r)$. Nesta figura consideramos $|\alpha_3| < |\alpha_5|$.

Também aqui nós temos que α_5 possui assinatura definida negativa, e de modo semelhante a α_4 , nós temos que α_6 também possui assinatura definida positiva. Na figura 3.2 nós ilustramos estes resultados.

Assim, nós temos que qualquer pequena perturbação conservativa não é capaz de destruir a estabilidade deste problema ao produzir uma colisão entre os autovalores α_3 e α_5 , e conseqüentemente também entre os autovalores α_4 e α_6 . A perda da estabilidade só ocorrerá se a perturbação deslocar os autovalores $\alpha_{1,2}$ para fora do eixo imaginário

ou se produzir uma colisão entre autovalores com assinaturas diferentes, como por exemplo entre α_3 e α_4 ou entre α_5 e α_6 em zero. A impossibilidade de ocorrer perda de estabilidade por colisão de Krein (colisão entre autovalores com assinaturas diferentes) já era esperada uma vez que este problema pode ser reduzido a 1 grau de liberdade.

3.3 O Potencial $U(r, \theta)$.

Um exemplo típico deste potencial é o de um planeta *esferoidal oblato* (ver, por exemplo, Blitzer, 1985):

$$U = -\frac{\mu}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \frac{R e^n}{r^n} P_n(\cos \theta) \right). \quad (3.30)$$

Diferente do potencial $U(r)$, aqui os pontos de equilíbrio não estão restritos apenas ao plano do equador, $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$. Por exemplo, no caso do potencial de um planeta esférico oblato, nós temos que as derivadas dos polinômios de Legendre podem ser representadas por

$$\frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \cos \theta} = \sum_{l=1}^n a_{l,n} (\cos \theta)^{l-1} \sin \theta, \quad (3.31)$$

aonde $a_{l,n} \in \mathbb{R}$. Assim, de (3.10e) nós temos que

$$-\frac{\mu}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(J_n \frac{R e^n}{r^n} \sum_{l=1}^n a_{l,n} (\cos \theta)^{l-1} \right) \right] \sin \theta = r^2 \omega^2 \cos \theta \sin \theta. \quad (3.32)$$

De imediato verifica-se que, para $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$ (ponto de equilíbrio equatorial), a relação acima é satisfeita. Entretanto, ao eliminarmos os termos em seno que aparecem em ambos os lados da relação (3.32) nós obtemos um polinômio (supondo n finito) em $\cos \theta$, cujas raízes fornecem os demais valores de $\bar{\theta}$ correspondendo, muito provavelmente, aos pontos de equilíbrio não equatoriais. Evidentemente, neste último caso, a determinação de \bar{r} , se possível, será feita ao resolvermos simultaneamente as equações (3.10e) (ou(3.32)) e (3.10d).

Nesta seção nós estamos supondo que o potencial $U(r, \theta)$ genérico, possua um ponto (ou pontos) de equilíbrio, equatorial ou não, o que nos leva a seguinte matriz da equação

variacional,

$$J \cdot D^2 H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ b & d & 0 & 0 & 0 & e \\ c & h & 0 & 0 & 0 & -b \\ h & f & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Os autovalores de (3.33) são dados por

$$\alpha_{1,2} = 0, \quad (3.34a)$$

$$\alpha_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{(af + c) + \sqrt{(af - c)^2 + 4ah^2}}{2}}, \quad (3.34b)$$

$$\alpha_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{(af + c) - \sqrt{(af - c)^2 + 4ah^2}}{2}}, \quad (3.34c)$$

aonde também estamos considerando que

$$(af + c) < 0 \quad \text{e} \quad 0 < (af - c)^2 + 4ah^2 < (af + c)^2, \quad (3.35)$$

pois, caso contrario, a parte real dos autovalores $\alpha_{3,\dots,6}$ não será nula.

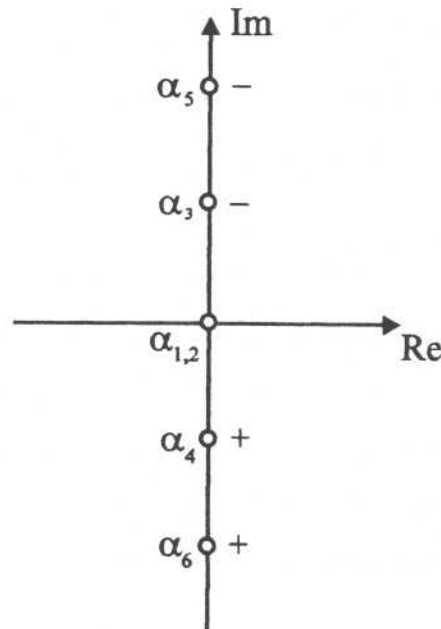


Figura 3.3: Assinaturas dos autovalores $\alpha_{1,\dots,6}$ do potencial genérico $U(r, \theta)$. Aqui nós temos necessariamente que $|\alpha_5| > |\alpha_3|$.

Para $\alpha_{3,5}$, os autovetores são

$$v_{3,5} = \left(-\frac{(af - \alpha_{3,5}^2)}{ah} z, z, -\frac{(abf - ahd - b\alpha_{3,5}^2)}{ah\alpha_{3,5}} z, -\frac{(af - \alpha_{3,5}^2)\alpha_{3,5}}{ah} z, \frac{\alpha_{3,5}z}{a}, 0 \right)^\dagger, \quad (3.36)$$

cuja assinatura é dada por

$$\langle v_{3,5}, v_{3,5} \rangle = -2|z|^2|\alpha_{3,5}| \left(\frac{(af - \alpha_{3,5}^2)^2}{(ah)^2} + \frac{1}{a} \right) < 0. \quad (3.37)$$

Portanto, assim como para o potencial $U(r)$, aqui $\alpha_{3,5}$ possuem assinaturas definidas negativas e $\alpha_{4,6}$ ($\alpha_{4,6} = -\alpha_{3,5}$) possuem assinaturas definidas positivas (figura 3.3). As mesmas conclusões mencionadas no final da seção anterior sobre as possibilidades de perda da estabilidade também se aplicam a esta. Aqui, a impossibilidade de ocorrer a perda da estabilidade por colisão de Krein também era esperada uma vez que as condições para os autovalores serem imaginários puros, (3.35), correspondem a condição do Hamiltoniano reduzido, obtido por $D^2H(\bar{x})$, ser definido positivo; MacKay, 1986.

3.4 O Potencial $U(r, \phi)$.

Como exemplos deste potencial nós temos o Problema Restrito de Três Corpos-circular, planar ou espacial, e o potencial de um planeta oblato ou prolato (o capítulo 4 é inteiramente dedicado ao estudo destes potenciais).

Da equação (3.10e) temos que $\bar{\theta} = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Mas para $\theta = 0, \pi$, de (3.10d), temos que

$$\frac{\partial U(r, \phi)}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad U = U(\phi),$$

o que é um caso pouco interessante. Portanto aqui nós consideraremos apenas $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, a matrix da equação variacional é dada por

$$J \cdot D^2H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ c & 0 & l & 0 & 0 & -b \\ 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & g & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

aonde

$$\begin{aligned} e &= a, \\ c &= - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_x - 3\omega^2, \\ f &= -\bar{r}^2 \omega^2, \end{aligned} \quad (3.39)$$

e cujos autovalores de (3.38) são

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{af} = \pm \omega i, \quad (3.40a)$$

$$\alpha_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{(ag+c) + \sqrt{(ag-c)^2 + 4al^2 - 4b^2g}}{2}}, \quad (3.40b)$$

$$\alpha_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{(ag+c) - \sqrt{(ag-c)^2 + 4al^2 - 4b^2g}}{2}}, \quad (3.40c)$$

Como os autovalores $\alpha_{3,\dots,6}$ devem ser puramente imaginários, então

$$(ag+c) < 0 \quad \text{e} \quad 0 < (ag-c)^2 + 4al^2 - 4b^2g < (ag+c)^2. \quad (3.41)$$

Para α_1 , os correspondentes autovetores são

$$v_1 = \left(0, \frac{\alpha_1 z}{f}, 0, 0, z, 0 \right)^\dagger, \quad (3.42)$$

cuja assinatura é

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \frac{2|z|^2}{f} |\alpha_1| < 0. \quad (3.43)$$

Desta forma nós temos que α_1 é definido negativo e $\alpha_2 = -\alpha_1$ é definido positivo.

Agora, para $\alpha_{3,5}$ nós temos

$$v_{3,5} = \left(\frac{(\alpha_{3,5}^2 - ga)z}{(bg + l\alpha_{3,5})}, 0, \frac{(b\alpha_{3,5} + la)z}{(bg + l\alpha_{3,5})}, \frac{(\alpha_{3,5}^2 - ga)\alpha_{3,5}z}{(bg + l\alpha_{3,5})}, 0, z \right)^\dagger, \quad (3.44)$$

sendo que a assinatura é dada por

$$\langle v_{3,5}, v_{3,5} \rangle = \underbrace{\frac{2|z|^2|\alpha_{3,5}|}{|bg + l\alpha_{3,5}|^2}}_{(I)} \underbrace{(-(ag - \alpha_{3,5}^2)^2 + b^2g - al^2)}_{(II)}. \quad (3.45)$$

Da expressão acima conclui-se, de imediato, que o termo (II) é o responsável pela definição do tipo de assinatura dos autovalores $\alpha_{3,5}$ uma vez que o termo (I) é sempre maior ou igual zero.

Com o intuito de simplificarmos a análise das assinaturas de α_3 e α_5 , nós definiremos

$$\rho = ag - c, \quad (3.46)$$

$$\beta = al^2 - b^2g. \quad (3.47)$$

Em termos destas novas variáveis nós temos que

$$\alpha_{3,5} = \sqrt{\frac{(\rho + 2c) \pm \sqrt{\rho^2 + 4\beta}}{2}}. \quad (3.48)$$

e

$$\langle v_{3,5}, v_{3,5} \rangle = \frac{2|z|^2|\alpha_{3,5}|}{|bg + l\alpha_{3,5}|^2} \underbrace{\left(- \left(\frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\beta}}{-2} \right)^2 - \beta \right)}_{(II)}. \quad (3.49)$$

Para $\alpha_3 = \alpha_5$, de (3.48) nós temos que $\rho^2 + 4\beta = 0$, o que implica que

$$\beta < 0 \quad \text{e} \quad \rho = \pm\sqrt{4|\beta|}. \quad (3.50)$$

Agora, concentrando-nos apenas no termo (II) em (3.49), nós temos que ambas as assinaturas de $\alpha_{3,5}$ serão negativas ((II) < 0) para

$$\beta > 0, \quad (3.51)$$

que a assinatura de α_3 será igual a zero quando

$$\beta < 0 \quad \text{e} \quad \rho = \pm\sqrt{4|\beta|} \quad (3.52a)$$

ou

$$\beta = 0 \quad \text{e} \quad \rho > 0, \quad (3.52b)$$

e que a assinatura de α_5 será igual a zero quando

$$\beta < 0 \quad \text{e} \quad \rho = \pm \sqrt{4|\beta|} \quad (3.53a)$$

ou

$$\beta = 0 \quad \text{e} \quad \rho < 0. \quad (3.53b)$$

Portanto no espaço bi-dimensional $\rho\beta$ nós temos 4 regiões cujas as delimitações são dadas por (3.50), (3.51), (3.52) e (3.53) (ver figura 3.4).

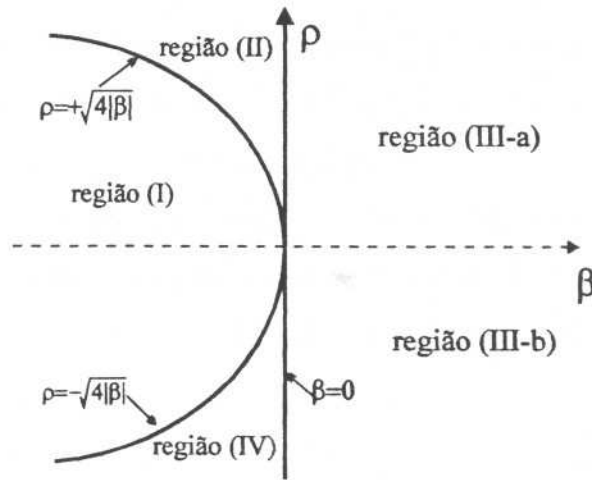


Figura 3.4. Regiões no plano $\rho\beta$.

Das relações (3.41) e de (3.46), nós temos que o ponto \bar{x} será estável se

$$\rho + 2c < 0 \quad (3.54)$$

e

$$\beta < c(c + \rho). \quad (3.55)$$

Assim, para $c > 0$, de (3.54) e (3.46) obtêm-se que

$$\rho + c < -c = -|c| \Rightarrow \rho + c = a \cdot g < 0 \Rightarrow \rho, g < 0 \quad \text{e} \quad \beta < c(c + \rho) < 0.$$

Mas, considerando (3.47), da última desigualdade acima mostra-se também que

$$\beta = al^2 - b^2g < 0 \Rightarrow g > 0,$$

o que contradiz a condição anteriormente determinada para "g". Deste modo nós temos que, para $c > 0$, o ponto de equilíbrio \bar{x} será sempre instável. Agora, supondo $c < 0$, de (3.54), nós temos duas possibilidades: $\rho + c > 0$ ou $\rho + c < 0$. Para $\rho + c > 0$ verifica-se de imediato que

$$\rho, g > 0 \quad \text{e} \quad \beta < c(c + \rho) < 0,$$

de onde conclui-se que, para $c < 0$ e $\rho + c > 0$, é somente na região (II) aonde \bar{x} poderá ser estável. E finalmente, considerando $c < 0$ e $\rho + c < 0$, nós temos

$$\rho + c = a \cdot g < 0 \quad \Rightarrow \quad g < 0,$$

e como $\beta = at^2 - b^2g$, então $\beta > 0$, resultando no fato de ser a região (III) aquela aonde \bar{x} poderá ser estável se $c < 0$ e $\rho + c < 0$. Na tabela 3.1 nós ilustramos estes resultados.

Tabela 3.1: Regiões Estáveis.

Domínio dos parâmetros	Região aonde \bar{x} pode ser estável
$c < 0, \rho + c > 0$ (ou $g > 0$)	Região (II)
$c < 0, \rho + c < 0$ (ou $g < 0$)	Região (III)

Destes resultados nós podemos concluir que na região (IV) o ponto \bar{x} será sempre instável. Além disso, também temos que sobre o semi-eixo $\rho > 0$ ($\beta = 0$), os autovalores (expressão (3.48)) são dados por

$$\alpha_3 = \sqrt{\rho + c} = \sqrt{ag}, \quad (3.56a)$$

$$\alpha_5 = \sqrt{c}, \quad (3.56b)$$

Neste caso nós temos exatamente a fronteira entre as regiões (II) e (III-a), e da tabela 3.1 conclui-se que aí $g = 0$, o que implica no fato do autovalor $\alpha_3 = \sqrt{ag}$ ser nulo. Deste modo, verifica-se que no semi-eixo $\rho > 0$ ($\beta = 0$) ocorre uma colisão entre autovalores de assinaturas contrárias, α_3 e α_4 (ver equação 3.27), o que explica o motivo do termo (II)(para α_3) se anular nesta região (equação (3.52b)).

Na região (I) nós temos que $\rho^2 + 4\beta < 0$, o que resulta no fato dos autovalores $\alpha_{3,5}$ terem as partes reais diferentes de zero (o ponto de equilíbrio \bar{x} é portanto instável nesta região) enquanto na região (III) nós temos que ambos os autovalores possuem assinaturas negativas (equação (3.51)). Para a região (II), considerando primeiro o autovalor α_5 , nós temos que a assinatura é igual a da região (III) uma vez que, para este autovalor, na fronteira que separa estas regiões (dada por (3.52b)) a assinatura não é nula sendo aí (nesta fronteira) também negativa (isto é verificado facilmente fazendo $\rho > 0$ e $\beta = 0$ no termo (II) de (3.49)). Agora, considerando apenas o autovalor α_3 , para a região (II) nós temos que qualquer caminho ligando um ponto desta a outro ponto da região (III-a) deverá, necessariamente, atravessar a fronteira dada por (3.52b) aonde $\langle v_3, v_3 \rangle = 0$. A priori isto não significa que na região (II) a assinatura de α_3 seja do tipo positiva. Para determinar o tipo da assinatura de α_3 nesta região, nós temos que

$$\begin{aligned} \left(- \left(\frac{-\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\beta}}{-2} \right)^2 - \beta \right) &= \frac{\sqrt{\rho^2 + 4\beta}}{-2} \left(\sqrt{\rho^2 + 4\beta} - \rho \right) \\ &= \begin{cases} < 0 & \text{se } \rho > 0 \text{ e } \beta > 0, \\ > 0 & \text{se } \rho > 0 \text{ e } \beta < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Assim, nós temos que na região (II) a assinatura do autovalor α_3 é do tipo positiva. Estes resultados estão ilustrados na figura 3.5.

É interessante observar que as condições (3.52a) e (3.53a) coincidem com a condição (3.50), de onde se conclui que o seguinte resultado importante:

PROPOSIÇÃO 1: *Para o potencial $U(r, \phi)$, por meio de variações dos parâmetros interno (variações dos elementos da matriz (3.38)) a colisão entre α_3 e α_5 geralmente ocorrerá com estes autovalores possuindo assinaturas diferentes. A única exceção seria a colisão entre α_3 e α_5 no ponto $(\rho, \beta) = (0, 0)$.*

Por consequência, o autovalor resultante desta colisão possuirá assinatura do tipo misto. Na verdade existe uma possibilidade da colisão entre os autovalores α_3 e α_5 acontecer com estes possuindo a mesma assinatura: seria a colisão ocorrendo no ponto $(\rho, \beta) = (0, 0)$. Entretanto, tal possibilidade é muito pouco provável.

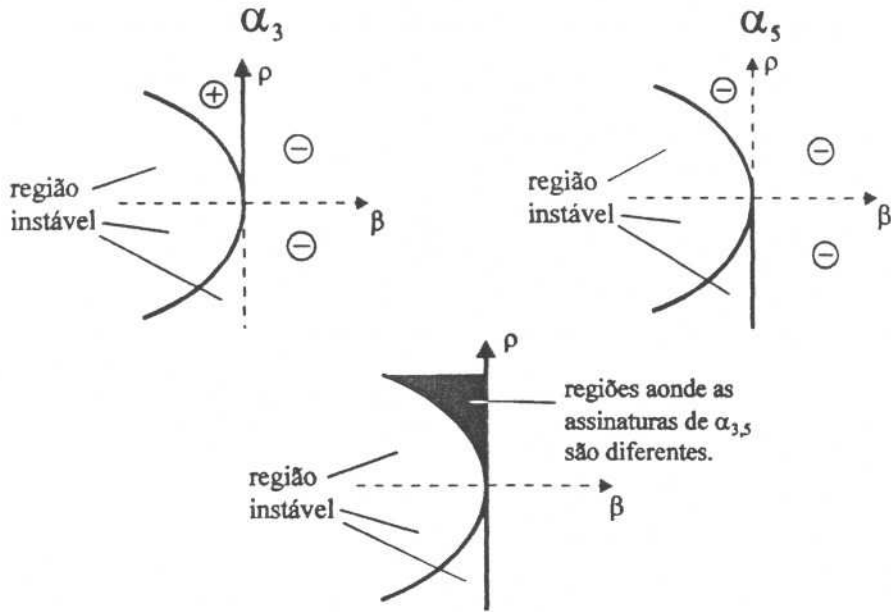


Figura 3.5. Assinaturas dos autovalores $\alpha_{3,5}$ no plano $\rho\beta$.

3.5 O Potencial $U(r, \theta, \phi)$.

Para este potencial nós temos que a matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ é dada por (3.12), e que os autovalores α_i são as raízes do polinômio característico $\det(J \cdot D^2H(\bar{x}) - \alpha_i I)$ que, como mencionado no capítulo 1, pode ser reduzido a um polinômio de 3^o. grau. Os autovetores correspondentes são dados por

$$v_i = \left(\frac{\mu(\alpha_i)z}{de(\alpha_i)}, \frac{a\beta(\alpha_i)z}{de(\alpha_i)}, \frac{\gamma(\alpha_i)z}{de(\alpha_i)}, \frac{\rho(\alpha_i)z}{\alpha_i de(\alpha_i)}, \frac{\alpha_i \beta(\alpha_i)z}{de(\alpha_i)}, z \right)^\dagger, \quad (3.58)$$

cuja assinatura é

$$\langle v_i, v_i \rangle = - \frac{2|z|^2}{|de(\alpha_i)|^2} \times \left(\Im \left(\frac{\mu(\alpha_i)\rho^*(\alpha_i)}{\alpha_i^*} \right) - a \Im(\alpha_i) |\beta(\alpha_i)|^2 + \Im(\gamma(\alpha_i) de^*(\alpha_i)) \right), \quad (3.59)$$

aonde $i = 1, \dots, 6$ e

$$\mu(\alpha_i) = \alpha_i^4 - (af + ge)\alpha_i^2 + a(efg - ek^2 + d^2g),$$

$$\beta(\alpha_i) = h\alpha_i^2 + (bk - dl)\alpha_i - egh + ekl - bdg,$$

$$\gamma(\alpha_i) = b\alpha_i^3 + el\alpha_i^2 + (adh - abf)\alpha_i - a(d^2l + bdk + ehk - efl),$$

$$\begin{aligned} \rho(\alpha_i) = & c\alpha_i^4 + (ah^2 - acf - ceg - b^2g + el^2)\alpha_i^2 \\ & + a(c afg - ek^2 + gd^2) + e(2hkl - gh^2 - fl^2) \\ & + b(fg - 2dgh - k^2 + 2dlk) - d^2l^2). \end{aligned}$$

$$de(\alpha_i) = l\alpha_i^3 + bg\alpha_i^2 + (ahk - afl)\alpha_i + a(bk^2 - dkl - bfg + dbh).$$

Para este problema nós podemos ter todas as possíveis combinações de assinaturas para os autovalores $\alpha_{1,\dots,6}$, como foi mostrado por testes numéricos.

CAPÍTULO 4.

Aplicações do Estudo para os pontos de equilíbrio.

O estudo desenvolvido neste capítulo será todo baseado nos resultados mostrados no capítulo anterior. Primeiramente mostraremos os resultados obtidos para o estudo do Problema Restrito de Três Corpos, e finalizaremos apresentando semelhante estudo para o problema de pontos de equilíbrio de corpos oblatos e prolatos.

4.1 O Problema restrito de Três Corpos.

Aqui nós consideramos o PRTC circular, casos espacial e planar, e expressos em coordenadas esféricas. Como principais resultados, nós temos a evolução das assinaturas dos autovalores $\alpha_{3,5}$ em relação parâmetro interno μ (razão das massas dos primários M_1 e M_2), e que a introdução da parte espacial não acrescenta novos fatos ao processo de perda da estabilidade do problema.

4.1.1 A Análise da Estabilidade e as Assinaturas dos Autovalores.

Para o PRTC circular, a expressão do potencial em coordenadas esféricas, quando escrito em relação a um sistema de referência não-inercial, girando, com um dos eixos contendo sempre os dois primários e centrado no centro de massa destes (ver figura 4.1), é dada por

$$U = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \quad (4.1)$$

aonde

$$\mu = \frac{M_2}{(M_1 + M_2)}, \quad (4.2a)$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \sin\theta \cos\phi}, \quad (4.2b)$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + d_2^2 + 2rd_2 \sin\theta \cos\phi}, \quad (4.2c)$$

aonde estamos considerando que $G(M_1 + M_2) = 1$. É conhecido que o PRTC - circular possui 5 pontos de equilíbrio equatoriais sendo que dois deles são estáveis enquanto os outros 3 são instáveis. Para os pontos de equilíbrio estáveis, os pontos L_4 e L_5 (pontos Lagrangeanos equiláterais) nós temos que

$$\bar{r} = \sqrt{1 + \mu(\mu - 1)}, \quad \bar{\theta} = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{\phi} = \pm \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}d}{2\bar{r}} \right), \quad (4.3)$$

e as derivadas parciais do potencial sendo dadas por

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{\bar{x}} = \frac{1}{d^3} - 3 \frac{\bar{r}^2 + \mu(1 - \mu)\cos^2 \bar{\phi} d^2}{d^5}, \quad (4.4a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \phi} \right|_{\bar{x}} = \frac{3\mu(1 - \mu)\bar{r}\text{sen} \bar{\phi} \cos \bar{\phi}}{d^3}, \quad (4.4b)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right|_{\bar{x}} = \frac{3\bar{r}^2 \mu(\mu - 1)\text{sen}^2 \bar{\phi}}{d^3}, \quad (4.4c)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \right|_{\bar{x}} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\bar{x}} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \phi} \right|_{\bar{x}} = 0. \quad (4.4d)$$

Substituindo as equações acima na matriz da equação variacional nós temos exatamente a matriz (3.38), para o do potencial genérico $U(r, \phi)$, no capítulo anterior.

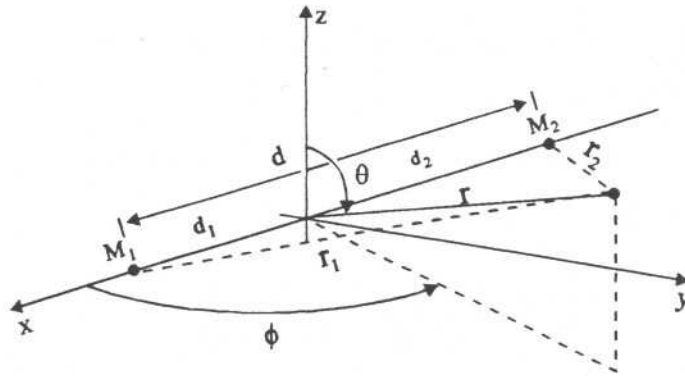


Figura 4.1. Geometria do PRTC.

Normalizando completamente o PRTC, $\omega = 1$ e $d = 1$, nós temos os autovalores

$$\alpha_{1,2} = \pm i, \quad (4.5a)$$

$$\alpha_{3,\dots,6} = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 27\mu(\mu - 1)}}{2}}, \quad (4.5b)$$

cujas as assinaturas (equações (3.43) e (3.45)) de $\alpha_{1,3,5}$ são

$$\langle v_1, v_1 \rangle = -2|z| \frac{1}{1 + \mu(\mu - 1)}, \quad (4.6a)$$

$$\langle v_{3,5}, v_{3,5} \rangle = \frac{-2|z||\alpha_{3,5}|}{|bg + l\alpha_{3,5}|^2} \left[\left(\frac{(2(1 + \mu(\mu - 1))(\sqrt{1 + 27\mu(\mu - 1)} - 1) \pm 9\mu(\mu - 1))^2}{16(1 - \mu(\mu - 1))^2} \right) + \left(\frac{9\mu(\mu - 1)(12\mu^4 - 24\mu^3 + 31\mu^2 - 19\mu + 16)}{16(1 - \mu(\mu - 1))^2} \right) \right]. \quad (4.6b)$$

Deste modo nós temos que toda a análise da estabilidade do PRTC pode expressa como um problema dependendo apenas de um único parâmetro, a razão de massas " μ ". Para este parâmetro, é sabido que existe um valor crítico, $\mu_c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{621}}{54}$ tal que para valores de μ menores que μ_c , $0 < \mu < \mu_c$, tem-se que os pontos $L_{4,5}$ são estáveis, enquanto que para os valores maiores, $\mu_c < \mu < \frac{1}{2}$, estes pontos são instáveis. Assim, para $\mu = 0$ ($M_2 = 0$) nós temos que $\alpha_{3,4} = 0$ e o problema é reduzido ao problema de dois corpos. Por sua vez, para $\mu = \mu_c$ nós temos que α_3 ($\langle v_3, v_3 \rangle > 0$ para $0 < \mu < \mu_c$) colide com α_5 ($\langle v_5, v_5 \rangle < 0$ para $0 < \mu < \mu_c$) e neste caso os pontos $L_{4,5}$ passam a ser instáveis. Este é um clássico exemplo da perda de estabilidade por *colisão de Krein*. Na figura 4.2 nós mostramos a evolução das assinaturas dos autovalores $\alpha_{3,5}$ com o parâmetro μ .

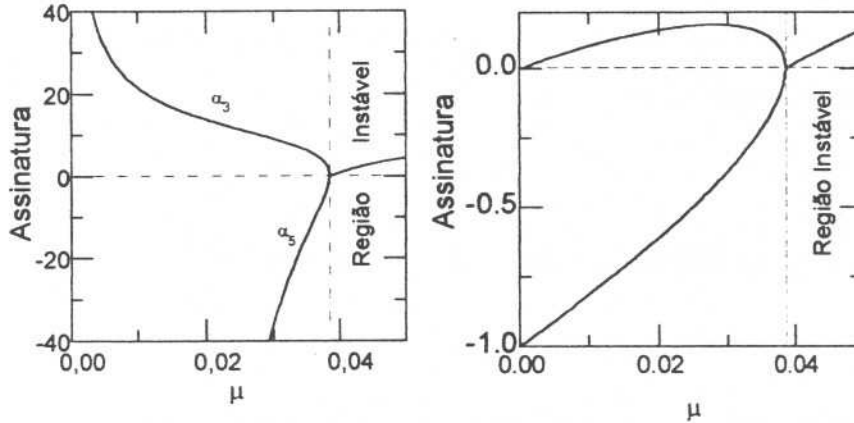


Figura 4.2: Assinaturas dos autovalores $\alpha_{3,5}$ em função do parâmetro μ . No diagrama da direita está incluída toda a expressão dada por (4.6b), enquanto no da esquerda nós consideramos apenas os termos entre os colchetes (que corresponde ao termo (II) em (3.45)).

Para um valor de μ muito próximo de zero nós temos que os autovalores α_1 e α_5

estão muito próximos um do outro, assim como os autovalores α_3 e α_4 estão próximos de zero. Deste modo uma pequena perturbação conservativa só seria capaz de destruir a estabilidade dos pontos L_4 e L_5 se produzir uma colisão entre α_3 e α_4 em zero. A colisão entre α_1 e α_5 não traz nenhuma consequência sobre a desestabilização destes pontos uma vez estes autovalores possuem a mesma assinatura. Por outro lado, se μ têm um valor menor que μ_c mas muito próximo deste, então nós temos que os autovalores α_3 e α_5 estão muito próximos um do outro, o que possibilita, a uma pequena perturbação conservativa, destruir a estabilidade dos pontos L_4 e L_5 ao produzir uma colisão entre α_3 e α_5 .

A instabilidade resultante da colisão entre os autovalores α_3 e α_5 já era esperada devido aos resultados obtidos na seção 3.4 do capítulo anterior. Da análise dos parâmetros ρ e β (ou proposição 1) nós vimos que esta colisão deveria ocorrer com os autovalores possuindo assinaturas diferentes. Para estes parâmetros, considerando o PRTC, nós temos

$$\rho = \frac{9}{2(1 + \mu(\mu - 1))} - \frac{7}{2}, \quad (4.7a)$$

$$\beta = \frac{9\mu(\mu - 1)(12\mu^4 - 24\mu^3 + 31\mu^2 - 19\mu + 16)}{16(1 - \mu(\mu - 1))^2}. \quad (4.7b)$$

Como esperado, a colisão entre α_3 e α_5 deverá acontecer sobre a curva $\rho = \pm\sqrt{4|\beta|}$, o que realmente acontece conforme a figura 4.3. Nesta figura nós mostramos, no espaço $\rho\beta$, a evolução destes parâmetros em relação a razão de massa μ . Para $\mu = \mu_c$ nós temos exatamente $\rho = +\sqrt{4|\beta|}$.

O problema planar é análogo ao problema espacial. Para o potencial nós temos que

$$r_1 = \sqrt{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos\phi}, \quad (4.8a)$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + d_2^2 + 2rd_2 \cos\phi}. \quad (4.8b)$$

O hamiltoniano para este problema é obtido fazendo $P_\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ em (3.7). Também, excluindo a segunda coluna e a segunda linha, assim como a quinta coluna e a quinta

linha em (3.38), nós obtemos a respectiva matriz da equação variacional

$$J \cdot D^2 H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \\ c & l & 0 & -b \\ l & g & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

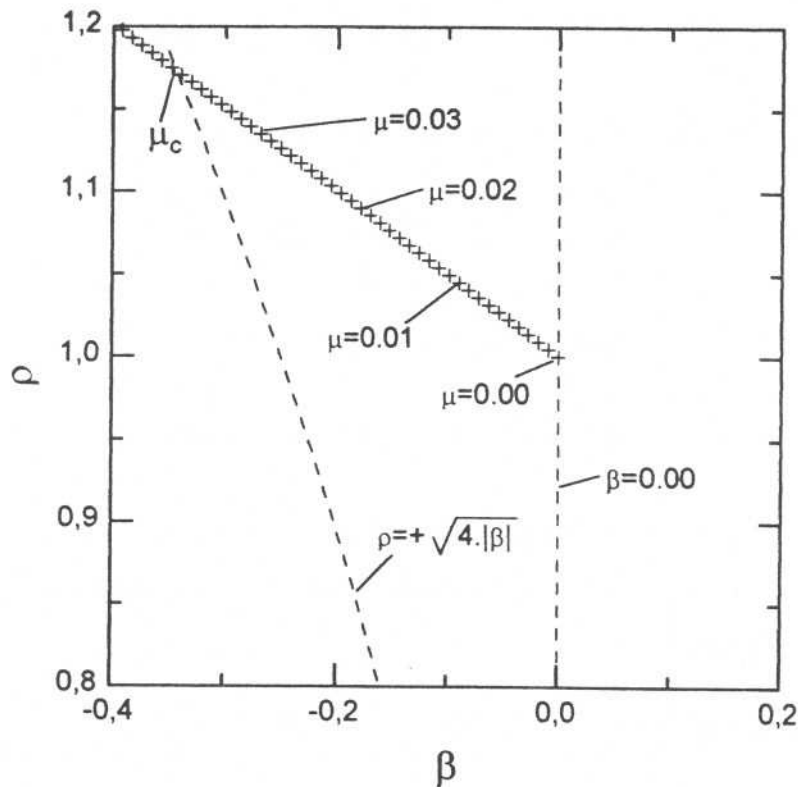


Figura 4.3: Diagrama $\rho\beta$ para o PRTC. Os valores dos parâmetros ρ e β foram obtidos como funções do parâmetro μ .

Obviamente, esta matriz satisfaz a propriedade dada por (2.18), o que se constata de imediato. Os autovalores $\alpha_{1,\dots,4}$ de (4.9) são exatamente os autovalores $\alpha_{3,\dots,5}$ do problema espacial sendo que as respectivas assinaturas de $\alpha_{1,\dots,4}$ (para (4.9)) também são as assinaturas de $\alpha_{3,\dots,5}$ do problema espacial. Deste modo, em termos da análise da estabilidade via a teoria de Krein, temos que o problema planar possui todas as propriedades do problema espacial. Como vimos, no caso espacial, a colisão entre os

autovalores α_1 e α_5 (e conseqüentemente entre α_2 e α_6) se dá com estes autovalores possuindo a mesma assinatura, o que não resulta em perda da estabilidade. Assim, a perda da estabilidade por colisão de Krein só ocorrerá quando α_3 colidir com α_5 (no problema espacial), o que também ocorre no problema planar.

4.2 pontos de equilíbrio para Potenciais de Corpos Oblatos e Prolatos.

Um outro exemplo de potencial que apresenta pontos de equilíbrio é o de um corpo oblato ou prolato. Como exemplos de corpos oblatos nós temos todos os planetas do Sistema Solar, e como exemplo de corpos prolatos nós temos alguns satélites naturais, bem como alguns asteróides, que podem ser considerados como tal (Howard, 1990, Kerr, 1994, Veverka et al, 1994), e também certas galáxias elípticas (Binney e Tremaine, 1987).

Nesta seção nós apresentamos a análise da estabilidade de pontos de equilíbrio para um potencial típico de corpos oblatos e prolatos, aonde considera-se não só o segundo harmônico zonal, J_2 , mas também a elipsidade do equador (Blitzer et al, 1962). As expressões determinadas para as assinaturas dos autovalores são gerais, valendo tanto para os corpos oblatos como prolatos.

4.2.1 A Análise da Estabilidade e as Assinaturas dos Autovalores.

Para os corpos oblatos ou prolatos, nós temos um típico e simples potencial que considera as variações tanto na direção da longitude como da latitude (co-latitude), cuja expressão é dada por (Blitzer et al, 1962 ou Howard, 1990)

$$U(r, \theta, \phi) = \underbrace{-\frac{\mu}{r}}_{(I)} + \frac{\sigma\mu}{r^3} \left(\underbrace{\tilde{a}(3 \cos^2 \theta - 1)}_{(II)} - \underbrace{\tilde{b} \sin^2 \theta \cos 2\phi}_{(III)} \right), \quad (4.10)$$

aonde $\bar{a} = \frac{1}{2}J_2R_c^2$ e $\bar{b} = \frac{1}{2}\xi R_c^2$, R_c é o raio equatorial médio do corpo, J_2 é segundo harmônico zonal, ξ é a elipsidade do equador, $\mu = G \cdot M$, $\sigma = +1$ para o caso oblato e $\sigma = -1$ para o caso prolato. O ângulo ϕ é tomado a partir do eixo maior da elipse equatorial. Da expressão deste potencial nós temos que o termo (I) representa um corpo esférico e homogêneo, o termo (II) inclui o segundo harmônico zonal. J_2 , que associado com o termo (I) representa um corpo esferoidal oblato (considerando $n = 2$ na equação (3.30)), e o termo (III) leva em conta a elipsidade do equador. Das equações (3.10d), (3.10e) e (3.10f) nós temos

$$\frac{\mu}{\bar{r}^2} - 3\frac{\mu}{\bar{r}^4} \left(\bar{a}(3 \cos^2 \bar{\theta} - 1) - \bar{b} \sin^2 \bar{\theta} \cos 2\bar{\phi} \right) = \bar{r}\omega^2 \sin^2 \bar{\theta}, \quad (4.11a)$$

$$\frac{\sigma\mu}{\bar{r}^3} [-\bar{a}(6 \cos \bar{\theta} \sin \bar{\theta}) - 2\bar{b} \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} \cos 2\bar{\phi}] = \frac{1}{2}\bar{r}^2\omega^2 \sin 2\bar{\theta}, \quad (4.11b)$$

$$\frac{\sigma\mu}{\bar{r}^3} 2\bar{b} \sin^2 \bar{\theta} \sin 2\bar{\phi} = 0. \quad (4.11c)$$

Assim, de (4.11c) verifica-se de imediato que

$$\bar{\phi} = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \quad (4.12)$$

restando portanto a determinação de \bar{r} e $\bar{\theta}$ que deve ser feita por meio das equações (4.11a) e (4.11b).

Neste problema é possível a existência de pontos de equilíbrio não equatoriais, $\bar{\theta} \neq \frac{\pi}{2}$. Entretanto como tais pontos tendem a ser sempre instáveis (Howard, 1990), nós dedicaremos a análise da estabilidade a apenas aos pontos equatoriais. Assim, fazendo $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$ ($\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$ é uma solução de (4.11b)) resta-nos determinar \bar{r} , o que se faz ao resolvermos (4.11a). Deste modo, para os elementos da matriz da equação variacional nós temos

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{\bar{x}} = -\frac{2\mu}{\bar{r}^3} - \frac{12\mu\sigma}{\bar{r}^5} [\bar{a} + \bar{b} \cos 2\bar{\phi}], \quad (4.13a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\bar{x}} = \frac{2\mu\sigma}{\bar{r}^3} [3\bar{a} + \bar{b} \cos 2\bar{\phi}], \quad (4.13b)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right|_{\bar{x}} = \frac{4\mu\sigma}{\bar{r}^3} [\bar{b} \cos 2\bar{\phi}], \quad (4.13c)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \right|_{\bar{x}} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \phi} \right|_{\bar{x}} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \phi} \right|_{\bar{x}} = 0. \quad (4.13d)$$

Destas equações conclui-se que $J \cdot D^2H(\bar{x})$ é dada por (3.38) com $l = 0$. Como o potencial (4.10) só é considerado como uma representação se o corpo for quase esférico, J_2 e ϵ sendo pequenos, é fácil mostrar que, até a primeira ordem na aproximação,

$$\omega^2 = \frac{\mu}{\bar{r}^3} \quad (\text{lei de Kepler}), \quad (4.14)$$

$$(ag + c) = \omega^2 \left(-1 + \frac{4\sigma}{\bar{r}^2} (3\bar{a} + 2\bar{b} \cos 2\bar{\phi}) \right), \quad (4.15)$$

$$\sqrt{(ag - c)^2 - 4b^2g} = \omega^2 \left(1 + \frac{4\sigma}{\bar{r}^2} (-3\bar{a} + 4\bar{b} \cos 2\bar{\phi}) \right), \quad (4.16)$$

o que resulta nas seguintes expressões para os autovalores:

$$\alpha_1 = \omega \sqrt{-1 - \frac{2\sigma}{\bar{r}^2} (3\bar{a} + \bar{b} \cos 2\bar{\phi})}, \quad (4.17)$$

$$\alpha_3 = \omega \sqrt{\frac{16\sigma\bar{b}}{\bar{r}^2} \cos 2\bar{\phi}}, \quad (4.18)$$

$$\alpha_5 = \omega \sqrt{-1 + \frac{4\sigma}{\bar{r}^2} (3\bar{a} - 2\bar{b} \cos 2\bar{\phi})}. \quad (4.19)$$

Como \bar{a} e \bar{b} são pequenos, então nós temos que os autovalores α_1 e α_5 são puramente imaginários. Entretanto, como α_3 também deve ser puramente imaginário, então de (4.18) e (4.12) nós temos

$$\sigma \cdot \cos 2\bar{\phi} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma = +1 & \text{e } \bar{\phi} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} & (\text{corpo oblato}), \\ \sigma = -1 & \text{e } \bar{\phi} = 0, \pi & (\text{corpo prolato}). \end{cases} \quad (4.20)$$

Assim, nós constatamos que as posições dos pontos de equilíbrio estáveis dos corpos oblatos estão defasados na longitude ϕ por um ângulo de 90° em relação aos pontos de equilíbrio estáveis dos corpos prolatos, o mesmo acontecendo com os pontos de equilíbrio instáveis.

De (3.45) nós temos que assinatura de α_1 é sempre negativa, enquanto que para α_3 e α_5 nós temos

$$\begin{aligned} \langle v_3, v_3 \rangle &= \frac{2|z|^2|\alpha_3|}{|bg|^2} (-(ag - \alpha_3^2)^2 + b^2g) \\ &= \frac{2|z|^2|\alpha_3|}{|bg|^2} \left(\frac{\omega^4}{\bar{r}^2} \bar{b} \right) > 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
\langle v_5, v_5 \rangle &= \frac{2|z|^2|\alpha_5|}{|bg|^2} (-(ag - \alpha_5^2)^2 + b^2g) \\
&= \frac{2|z|^2|\alpha_5|}{|bg|^2} \left(-\frac{\omega^4}{\bar{r}^2} (1 - 24\sigma(\bar{a} + \bar{b} \cos 2\phi)) \right) < 0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Estes resultados associados com os do capítulo anterior para os potenciais $U(r)$ e $U(r, \theta)$, nos permite determinar a evolução dos autovalores quando consideramos inicialmente o corpo (um planeta ou uma galáxia, etc) como esférico e homogêneo e que, posteriormente, passa a apresentar pequenas deformações. Para estas deformações nós primeiramente consideramos um achatamento (ou um alongamento) na direção dos pólos, e depois uma pequena deformação na região do equador. Na figura 4.4 nós mostramos estas evoluções dos autovalores $\alpha_{1,3,5}$ (para pontos de equilíbrio com $\sigma \cdot \cos 2\bar{\phi} = -1$) no plano complexo.

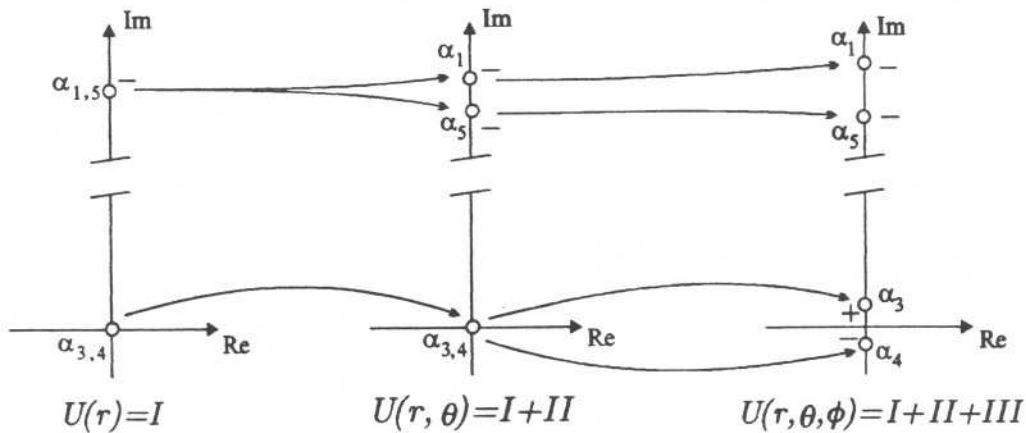


Figura 4.4. Evolução dos autovalores $\alpha_{1,3,5}$ de um corpo esférico e homogêneo ($U(r) = I$) que é primeiramente achatado (ou alongado) na direção dos pólos ($U(r, \theta) = I + II$) e então também sofre uma deformação no equador ($U(r, \theta, \phi) = I + II + III$), aonde estamos considerando $\sigma \cdot \cos 2\bar{\phi} = -1$.

Para este problema, considerando sempre $\sigma \cdot \cos 2\bar{\phi} = -1$, nós temos que, sob pequenas perturbações conservativas, a perda da estabilidade só será possível se α_3 colidir com α_4 em $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Já a possibilidade da colisão entre α_3 e α_5 (autovalores com assinaturas diferentes) embora possa ocorrer matematicamente falando, ela deixa de ter um sentido físico uma vez que no potencial (4.10) os parâmetros \bar{a} e \bar{b} são tidos



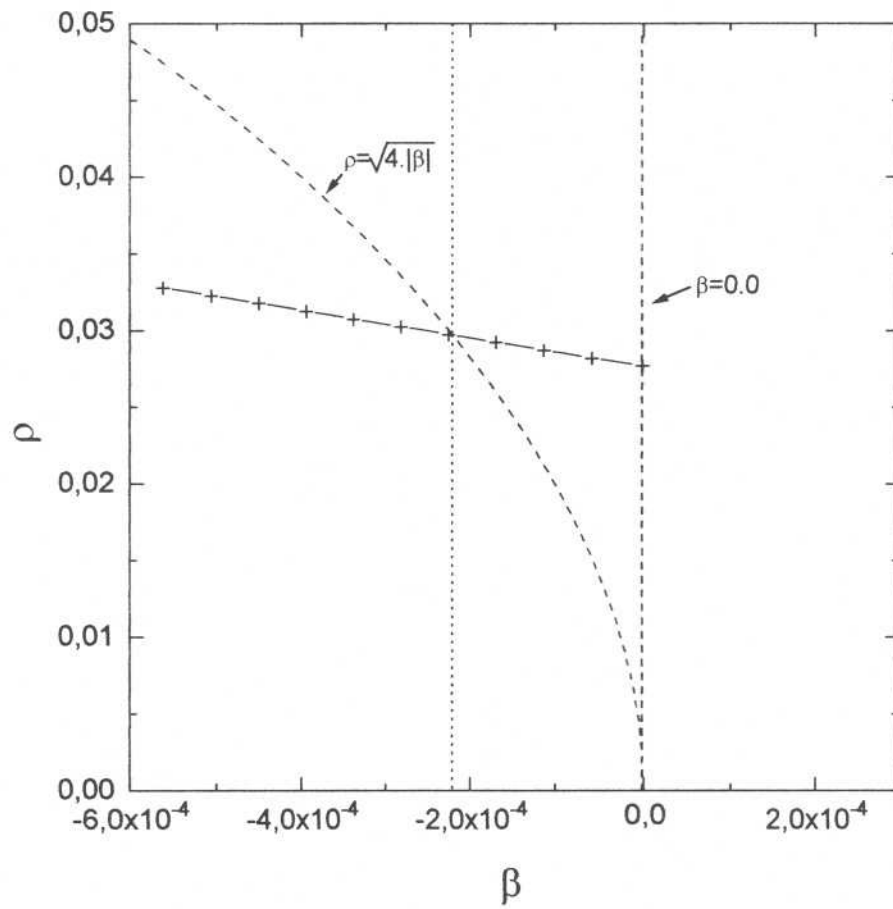


Figura 4.6. Diagrama $\rho\beta$ para o potencial de corpo oblato ou prolato. Os parâmetros ρ e β foram obtidos ao variarmos simultaneamente os parâmetros \tilde{a} e \tilde{b} a partir de zero e com incremento de 0.05.

CAPÍTULO 5.

Autovalores Perturbados.

Neste capítulo nós estudamos o efeito de uma perturbação conservativa (que preserva a estrutura hamiltoniana do problema em questão) sobre o deslocamento dos autovalores no plano complexo. Primeiramente nós deduzimos uma expressão para a determinação das partes perturbadas dos autovalores, e comparamos os resultados obtidos com os fornecidos por outra expressão encontrada na literatura. A expressão obtida é geral e, a princípio, pode ser aplicada a todo problema hamiltoniano que apresenta pontos de equilíbrio. E finalizando, nós aplicamos este estudo aos asteróides do "tipo troiano" de Marte e dos principais planetas jovianos, considerando as mútuas perturbações destes planetas, e ao problema de um satélite geostacionário, considerando a Lua como o corpo perturbador.

5.1 pontos de equilíbrio Perturbados.

Nesta seção nós estamos considerando $H(x)$ um hamiltoniano que possui um ponto de equilíbrio \bar{x} (com todos os correspondentes autovalores da matriz $J \cdot D^2H(\bar{x})$ diferentes de zero). Assim, do teorema da função implícita nós temos que o novo hamiltoniano

$$H_\epsilon(x) = H(x) + \epsilon V(x) \quad (|\epsilon| \ll 1) \quad (5.1)$$

possui um ponto de equilíbrio \bar{x}_ϵ tal que

$$\|\bar{x}_\epsilon - \bar{x}\| \ll 1 \quad \text{e} \quad \bar{x}_\epsilon \Big|_{\epsilon=0} = \bar{x}. \quad (5.2)$$

A prova da existência do *ponto de equilíbrio perturbado*, \bar{x}_ϵ , é feita a partir das equações de movimento

$$\dot{x} = J \cdot DH(x) + \epsilon J \cdot DV(x). \quad (5.3)$$

Neste capítulo nós somente consideramos perturbações hamiltonianas do tipo $\epsilon V(x)$. Entretanto a existência do ponto de equilíbrio \bar{x}_ϵ também é válida se em (5.3), ao invés de $\epsilon J \cdot DV(x)$, nós considerarmos uma perturbação não conservativa, $F_\epsilon(x)$, aonde $F_\epsilon(x) \Big|_{\epsilon=0} = 0$. É evidente que, se \bar{x} é um ponto de equilíbrio estável, então neste caso espera-se que o ponto \bar{x}_ϵ possua alguns autovalores com parte real não nula, de onde conclui-se que, para perturbações dissipativas (ou anti-dissipativas), \bar{x}_ϵ geralmente não será estável (este assunto será objeto de estudo nos próximos capítulos).

Conforme foi mencionado na seção 1.2 (capítulo 1) o deslocamento nos autovalores, resultante da ação de $\epsilon V(x)$, se dará sobre o eixo imaginário, (a menos que alguns autovalores com assinaturas diferentes colidam entre si, resultando, neste caso, na possibilidade de deslocamentos de autovalores para fora do eixo imaginário). Deste modo nós temos que o novo autovalor α_ϵ (*autovalor perturbado*) é também puramente imaginário, satisfazendo $|\alpha_\epsilon - \alpha| \ll 1$, o que nos permite estender a análise da estabilidade de \bar{x} até \bar{x}_ϵ . Estes resultados também são válidos se $H(x)$ possui autovalores $\alpha_i = \alpha_{i+n} = 0$ ("n" sendo o número de graus de liberdade do problema) associados a uma integral primeira e se a perturbação $\epsilon V(x)$ for tal que preserve esta integral.

5.2 Autovalores Perturbados.

Nesta seção nós apresentamos um método para a obtenção da parte perturbada de um autovalor. Este método consiste em um procedimento diferente do encontrado na literatura e por isso terá aqui a sua dedução exibida de forma detalhada. Todas expansões efetuadas no que segue levam em conta apenas os termos até $\mathcal{O}(\epsilon)$.

Para o ponto de equilíbrio perturbado nós podemos fazer

$$\bar{x}_\epsilon = \bar{x} + \epsilon \zeta \tag{5.4}$$

aonde $\zeta \in R^{2n}$. Assim, nós temos

$$J \cdot DH(\bar{x}_\epsilon) = \epsilon J \cdot D^2H(\bar{x})\zeta \tag{5.5}$$

e

$$\epsilon J \cdot DV(\bar{x}_\epsilon) = \epsilon J \cdot DV(\bar{x}) \quad (5.6)$$

o que nos permite fazer

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_\epsilon = 0 &= J \cdot DH(\bar{x}_\epsilon) + \epsilon J \cdot DV(\bar{x}_\epsilon) = \epsilon \left(J \cdot D^2H(\bar{x})\zeta + J \cdot DV(\bar{x}) \right) \\ \Rightarrow \zeta &= - \left(J \cdot D^2H(\bar{x}) \right)^{-1} \cdot (J \cdot DV(\bar{x})). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para a equação variacional perturbada nós também temos

$$\dot{\xi} = J \cdot D^2H(\bar{x}_\epsilon)\xi = \left(J \cdot D^2H(\bar{x}_\epsilon) + \epsilon J \cdot D^2V(\bar{x}_\epsilon) \right) \xi, \quad (5.8)$$

sendo que a expansão das matrizes acima fornecem

$$\begin{aligned} J \cdot D^2H(\bar{x}_\epsilon) &= J \cdot D^2H(\bar{x}) + \epsilon J \cdot D^3H(\bar{x})\zeta \\ &= J \cdot D^2H(\bar{x}) + \epsilon J \cdot D^3H(\bar{x}) \underbrace{\left[- \left(J \cdot D^2H(\bar{x}) \right)^{-1} \cdot \left(J \cdot DV(\bar{x}) \right) \right]}_{(5.7)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

e

$$\epsilon J \cdot D^2V(\bar{x}_\epsilon) = \epsilon J \cdot D^2V(\bar{x}). \quad (5.10)$$

Deste modo, para a equação variacional perturbada nós temos que

$$\dot{\xi} = \left(J \cdot D^2H(\bar{x}) + \epsilon J \cdot \left(A(\bar{x}) + D^2V(\bar{x}) \right) \right) \xi \quad (5.11)$$

aonde

$$A(\bar{x}) = D^3H(\bar{x}) \left[- \left(J \cdot D^2H(\bar{x}) \right)^{-1} \cdot \left(J \cdot DV(\bar{x}) \right) \right]. \quad (5.12)$$

Agora, considerando o autovalor perturbado dado por

$$\alpha_\epsilon = \alpha + \epsilon \tilde{\alpha}, \quad (5.13)$$

e do fato do determinante ser uma função contínua nos elementos da matriz, definindo

$$M(\epsilon) = J \cdot D^2H(\bar{x}) + \epsilon J \left(A(\bar{x}) + D^2V(\bar{x}) \right) - (\alpha + \epsilon \tilde{\alpha}) \cdot I_{2n \times 2n} \quad (5.14)$$

nós temos a matriz que fornece o polinômio característico, até $\mathcal{O}(\epsilon)$, correspondendo a equação variacional perturbada. Assim, até $\mathcal{O}(\epsilon)$,

$$\begin{aligned} \det(M(\epsilon)) &= \underbrace{\det(M(\epsilon=0))}_{=0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\det(M(\epsilon)) \right)_{\epsilon=0} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\det(M(\epsilon)) \right)_{\epsilon=0} &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Como estamos considerando que a parte não perturbada do autovalor, α , é conhecida, então nós temos que (5.15) é na verdade um polinômio de grau 1 em $\tilde{\alpha}$, o que nos permite determina-lo facilmente.

Uma forma alternativa para o cálculo de $\tilde{\alpha}$ é dada por (MacKay, 1991 ou Horn e Johson, 1985)

$$\tilde{\alpha} = i \frac{(v^*)(A(\bar{x}) + D^2V(\bar{x}))v}{\langle v, v \rangle}, \quad (5.16)$$

aonde v é um autovetor do autovalor não perturbado α e $\langle v, v \rangle$ é a expressão usada na definição de assinatura. Apesar da diferença dos métodos para o cálculo de $\tilde{\alpha}$, ambos forneceram praticamente os mesmos valores. Nos cálculos que serão apresentados na próxima seção, tanto para os problemas envolvendo asteróides como também para o problema sobre satélites geostacionários, as diferenças relativas entre os valores de $\tilde{\alpha}$ obtidos pelos dois métodos mostraram ser da ordem de

$$\frac{\tilde{\alpha}_{(5.15)} - \tilde{\alpha}_{(5.16)}}{\tilde{\alpha}_{(5.16)}} = \pm 10^{-4}, \quad (5.17)$$

aonde $\tilde{\alpha}_{(5.15)}$ e $\tilde{\alpha}_{(5.16)}$ correspondem as partes perturbadas calculadas por meio de (5.15) e (5.16), respectivamente.

Se a perturbação for devida a muitos corpos (" r " corpos),

$$\epsilon V(\bar{x}) = \sum_{j=1}^r \epsilon_j V_j(\bar{x}), \quad (5.18)$$

então para o autovalor perturbado nós podemos fazer

$$\alpha_\epsilon = \alpha + \sum_{j=1}^r \epsilon_j \tilde{\alpha}^j \quad (5.19)$$

sendo que $\tilde{\alpha}^j$ pode ser determinado de

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_j} \left(\det(M(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)) \right)_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r=0} = 0. \quad (5.20)$$

Como em (5.15), a expressão acima é um polinômio de grau 1 em $\tilde{\alpha}^j$ (como a diferencial em (5.20) é tomada em $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r = 0$, então não há a possibilidade de aparecer em (5.20) um termo possuindo $\tilde{\alpha}^k$ para $k \neq j$). Uma outra forma para a determinação dos $\tilde{\alpha}^j$ é dada por

$$\tilde{\alpha}^j = i \frac{(v^*)(A_j(\bar{x}) + D^2V_j(\bar{x}))v}{\langle v, v \rangle}, \quad (5.21)$$

com $A_j(\bar{x}) = D^3H(\bar{x}) \left[-(J \cdot D^2H(\bar{x}))^{-1} \cdot (J \cdot DV_j(\bar{x})) \right]$.

5.3 Perturbação dos Pontos Lagrangeanos Equilaterais.

Nesta seção nós estudamos os deslocamentos sofridos pelos autovalores da matriz da equação variacional, correspondendo aos pontos lagrangeanos equilaterais, L_4 e L_5 , mediante uma perturbação conservativa (resultante da ação de um 4º corpo). Para este caso o potencial perturbador $V(x, t)$ será dado por

$$\epsilon V(x, t) = \epsilon \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_p^2 - 2rr_p \cos \alpha}} \quad (5.22)$$

aonde para o PRTC (tendo em vista a normalização deste problema)

$$\epsilon = \frac{M_{\text{corpo perturbador}}}{M_{\text{primario 1}} + M_{\text{primario 2}}} \quad (5.23)$$

e

$$\begin{aligned} \cos \alpha = & \text{sen} \theta \cos(\omega_p t) \cos(\Omega - \phi) - \text{sen}(\omega_p t) \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta \cos^2(\Omega - \phi)} \\ & \cdot \cos \left(\tan^{-1} \left(\frac{\cot \theta}{\text{sen}(\Omega - \phi)} \right) + I \right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

aonde r_p , $\omega_p t$, $\Omega = \omega t$, e I estão mostrados na figura 5.1. Quando $I = 0$, problema planar, nós podemos fazer $\cos(\omega_p t) = 1$, $\text{sen}(\omega_p t) = 0$ e $\Omega = (\omega_p - \omega) \cdot t$.

O potencial (5.22) é um potencial típico de um corpo perturbador mas que apresenta dependência temporal. Nós lembramos aqui que a existência do ponto de equilíbrio perturbado \bar{x}_c só é garantida pelo teorema da função implícita se o potencial perturbador $V(x)$ não depender do tempo. Portanto, com o intuito de eliminarmos este problema, e também para simplificarmos os cálculos de $\bar{\alpha}$, nós só levaremos em conta a parte secular desta perturbação :

$$\bar{V} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V(x, t) dt. \quad (5.25)$$

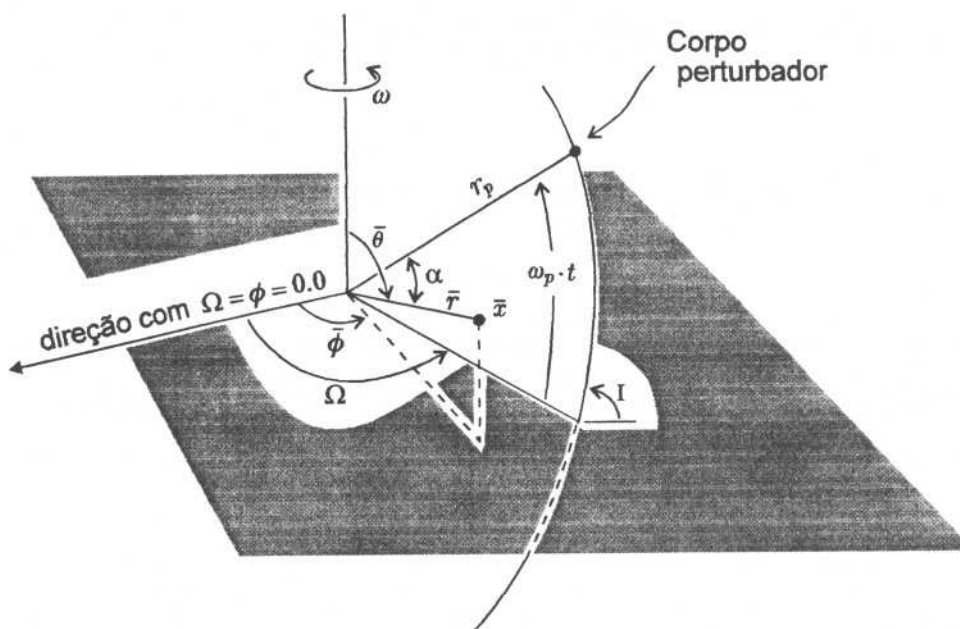


Figura 5.1. Sistema de referência para PRTC perturbado.

Deste modo, no lugar de DV e D^2V , que aparecem nas expressões da seção 5.2, nós usaremos $D\bar{V}$ e $D^2\bar{V}$, aonde

$$D\bar{V} = \lim_{T \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial V}{\partial r} dt \\ \vdots \\ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial V}{\partial P_\phi} dt \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

e

$$D^2\bar{V} = \lim_{T \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dt & \dots & \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial P_\phi} dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial^2 V}{\partial P_\phi \partial r} dt & \dots & \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial^2 V}{\partial P_\phi^2} dt \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Como no nosso caso nós consideraremos apenas corpos perturbadores com órbitas sempre circulares, assim os limites que aparecem em (5.25), (5.26) e (5.27) deixam de ser essenciais, sendo que a parte secular do potencial perturbador será, neste caso, o termo constante da expansão de (5.22) em uma série de Fourier,

$$\bar{V} = \frac{|\omega_p - \omega|}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{|\omega_p - \omega|}} V(x, t) dt. \quad (5.28)$$

É evidente que esta simplificação também será considerada nos cálculos de $D\bar{V}$ e $D^2\bar{V}$.

Tabela 5.1: Valores de ϵ para os planetas

Planeta primário 2	Planeta perturbador	ϵ
Marte	Terra	$3.0404 \cdot 10^{-6}$
	Júpiter	$9.5478 \cdot 10^{-4}$
	Saturno	$2.8583 \cdot 10^{-4}$
Júpiter	Marte	$3.2240 \cdot 10^{-7}$
	Saturno	$2.8556 \cdot 10^{-4}$
	Urano	$4.3685 \cdot 10^{-5}$
	Netuno	$5.1726 \cdot 10^{-5}$
Saturno	Marte	$3.2262 \cdot 10^{-7}$
	Júpiter	$9.5451 \cdot 10^{-4}$
	Urano	$4.3714 \cdot 10^{-5}$
	Netuno	$5.1761 \cdot 10^{-5}$
Urano	Júpiter	$9.5474 \cdot 10^{-4}$
	Saturno	$2.8582 \cdot 10^{-4}$
	Netuno	$5.1773 \cdot 10^{-5}$
Netuno	Júpiter	$9.5473 \cdot 10^{-4}$
	Saturno	$2.8582 \cdot 10^{-4}$
	Urano	$4.3725 \cdot 10^{-5}$

Para o Sistema Solar temos que ϵ é bastante pequeno, o que pode ser observado da tabela 5.1 aonde mostramos os valores de ϵ para diversas configurações de planetas

considerados como um dos primários (o Sol é sempre o outro primário) e como um corpo perturbador. Portanto, no que segue, o principal interesse reside em verificar os efeitos da perturbação na direção dos deslocamentos dos autovalores, dedicando especial atenção para o autovalor α_3 (autovalor que possui pequeno valor absoluto).

Primeiramente nós analisamos o sistema Sol-Júpiter-Asteróide Troiano, considerando-os como um Problema Restrito de Três-Corpos circular ($\mu = 9.5388 \cdot 10^{-4}$), e considerando inicialmente Saturno como um corpo perturbador. Para simplificarmos a computação da parte secular de DV e D^2V , como já mencionamos anteriormente, nós consideramos a órbita de Saturno como circular e com $I = 0$.

Para este problema nós temos que

$$\Omega = 0,5964 \cdot t, \quad \bar{r} = 0,99051, \quad r_p = 1,8312,$$

onde as unidades adotadas correspondem ao do problema normalizado, como definido no capítulo anterior. Portanto, considerando os valores dos parâmetros acima, para as partes perturbadas dos autovalores nós encontramos

$$\tilde{\alpha}_1 = 0.2305 i, \quad \tilde{\alpha}_3 = 0.00322 i, \quad \tilde{\alpha}_5 = -0.2370 i.$$

Estes valores foram obtidos por meio de (5.15) e também por meio de (5.16). A partir de um hamiltoniano como (5.1) e das posições do ponto de equilíbrio \bar{x} , para o cálculo dos $\tilde{\alpha}_k$, via (5.15) foi elaborado um programa escrito em linguagem de computação algébrica, via Maple, que determina analiticamente as matrizes $J \cdot DH(\bar{x})$, $J \cdot D^2H(\bar{x})$, $D^3H(\bar{x})$, calcula numericamente as matrizes $D\bar{V}(\bar{x})$ e $D^2\bar{V}(\bar{x})$, "monta" e diferencia a matriz $M(\epsilon)$, fornecendo no final os valores dos $\tilde{\alpha}_k$.

Agora, considerando Marte como o corpo perturbador também com órbita circular e com $I = 0$, nós temos

$$\Omega = 5,31004 \cdot t, \quad \bar{r} = 0.99051, \quad r_p = 0.29285,$$

cujos resultados para as partes perturbadas dos autovalores são

$$\tilde{\alpha}_1 = 0.0787 i, \quad \tilde{\alpha}_3 = -0.0541 i, \quad \tilde{\alpha}_5 = -0.0860 i.$$

Na figura 5.2 nós mostramos os resultados acima no plano complexo.

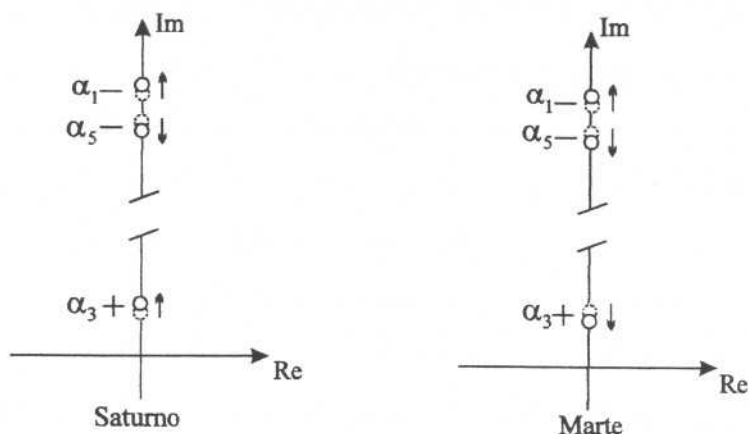


Figura 5.2. Partes perturbadas dos autovalores no plano complexo.

Qualitativamente falando, dos resultados acima nós observamos que o efeito das perturbações seculares de Marte e Saturno são diferentes apenas sobre o autovalor α_3 . Os efeitos das perturbações destes planetas sobre os autovalores α_1 e α_5 tem como consequência deslocá-los com os mesmos sentidos, α_1 afastando de α_5 . Por sua vez, para o autovalor α_3 , nós temos que Saturno age de modo a afasta-lo da origem ($\Im(\tilde{\alpha}_3) > 0$), enquanto Marte, ao contrário, age de modo a aproxima-lo da origem ($\Im(\tilde{\alpha}_3) < 0$). Assim, considerando que a distância no eixo imaginário entre α_3 e α_5 é muito grande, comparada com a distância entre α_3 e a origem, nós temos que seria mais fácil destruir a estabilidade deste problema (através de perturbações como as que estamos considerando) produzindo uma colisão entre α_3 e o seu conjugado complexo na origem, do que produzindo uma colisão entre α_3 e α_5 . Este fato nos leva a concluir que a ação de Saturno sobre os pontos L_4 e L_5 é a de torna-los um "pouco mais" estáveis, enquanto que a ação de Marte é a torna-los um "pouco menos" estáveis (nós lembramos aqui que a possibilidade da colisão de α_3 com o seu conjugado complexo na origem não será considerada pois os deslocamentos sofridos por α_3 são praticamente desprezíveis uma

vez que, para o Sistema Solar, os valores de ϵ são muito pequenos, ou seja:

$$\Im(\alpha_{3\epsilon}) = \Im\left(\alpha_3 + \sum_j \epsilon^j \tilde{\alpha}_3^j\right) > 0.$$

Um ponto interessante no cálculo efetuado para a determinação das partes perturbadas dos autovalores, $\tilde{\alpha}_k$, é que ele não leva em conta a massa do planeta perturbador. A massa do planeta perturbador só aparece no cálculo do autovalor perturbado, α_ϵ , através de ϵ . Isto nos leva, a princípio, concluir que a diferente consequência das ações das perturbações de Marte e Saturno, sobre os pontos de equilíbrio de Júpiter, estariam relacionadas ao fato de Marte possuir uma órbita interior a Júpiter, enquanto Saturno possui uma órbita exterior. Na verdade, é quase isto o que acontece. Como a massa do corpo perturbador não afeta o cálculo de $\tilde{\alpha}_k$, nós podemos expressar a parte perturbada $\tilde{\alpha}_3$ como função do raio da órbita do corpo perturbador, r_p . Na figura 5.3 nós mostramos a variação de $\Im(\tilde{\alpha}_3)$ com r_p . Neste diagrama nós observamos que um corpo perturbador com $r_p < r_c$ ($r_c \approx 0.63 \cdot a_{Jupiter}$) torna os pontos L_4 e L_5 de Júpiter um pouco menos estáveis, enquanto um corpo com $r_p > r_c$, ao contrário, faz com que eles sejam um pouco mais estáveis. Na figura 5.4 nós mostramos o mesmo tipo de diagrama da figura 5.3, só que para pontos lagrangeanos de vários sistemas com $0 < \mu < \mu_c$.

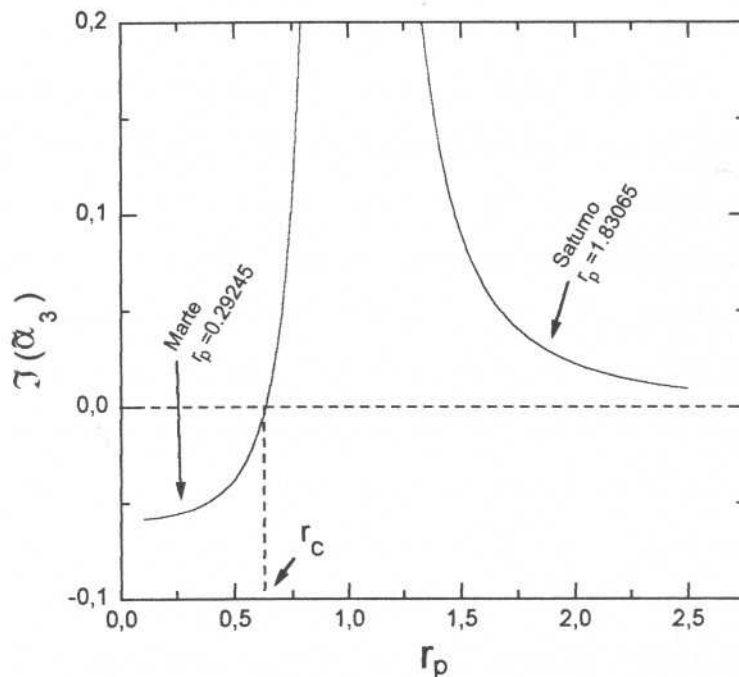


Figura 5.3. Diagrama de $\Im(\tilde{\alpha}_3)$ versus r_p para os pontos L_4 e L_5 de Júpiter.

Um modo alternativo de verificar a ação do corpo perturbador sobre o autovalor $\tilde{\alpha}_3$ está apresentado na figura 5.5, aonde mostramos o gráfico da razão de massa μ versus r_p . Nesta figura nós temos que para um sistema com uma determinada razão de massa μ ($\mu < \mu_c$) se o corpo perturbador possui $r_p < r_c$ (ou $(r_p > r_c)$ então $\Im(\tilde{\alpha}_3) < 0$ (ou $\Im(\tilde{\alpha}_3) > 0$).

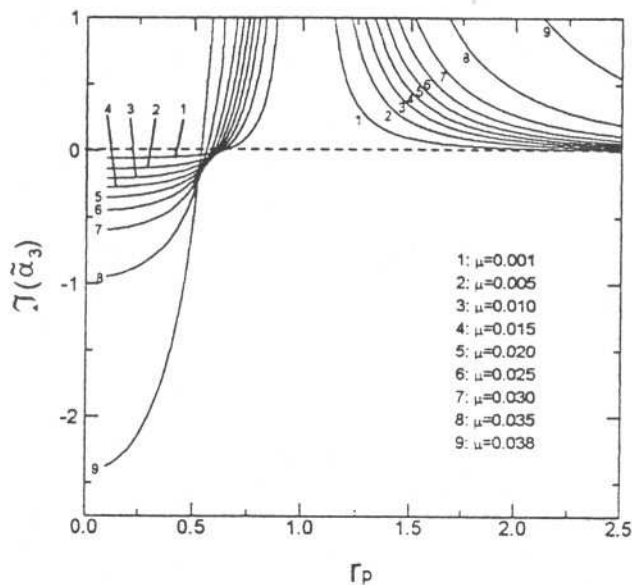


Figura 5.4. Diagrama de $\Im(\tilde{\alpha}_3)$ versus r_p para alguns valores da razão de massa μ .

Destes diagramas nós podemos determinar as pequenas mudanças nas estabilidades dos pontos lagrangeanos de Marte e dos planetas jovianos:

- i) Para o sistema com $\mu = \text{Marte}/(\text{Sol} + \text{Marte})$, nós temos que os planetas Júpiter, Saturno, Urano e Netuno possuem $r_p > r_c$. Neste caso $\Im(\tilde{\alpha}_3) > 0$ para qualquer um dos quatro planetas perturbadores e, portanto, tem-se que os planetas jovianos fazem com que os pontos L_4 e L_5 sejam um pouco mais estáveis.
- ii) Para o sistema com $\mu = \text{Jupiter}/(\text{Sol} + \text{Jupiter})$, nós temos um resultado semelhante uma vez que Saturno, Urano e Netuno ($r_p > r_c$) fazem com que os asteróides Troianos (considerando um PRTC circular) sejam um pouco mais estáveis embora

Marte, ao contrário, faz com eles sejam um pouco menos estáveis. Como a massa de Saturno, Urano e Netuno são maiores que a de Marte, nós temos

$$|\epsilon^{(Ma)}\tilde{\alpha}_3^{(Ma)}| < |\epsilon^{(Sa)}\tilde{\alpha}_3^{(Sa)} + \epsilon^{(Ur)}\tilde{\alpha}_3^{(Ur)} + \epsilon^{(Ne)}\tilde{\alpha}_3^{(Ne)}|.$$

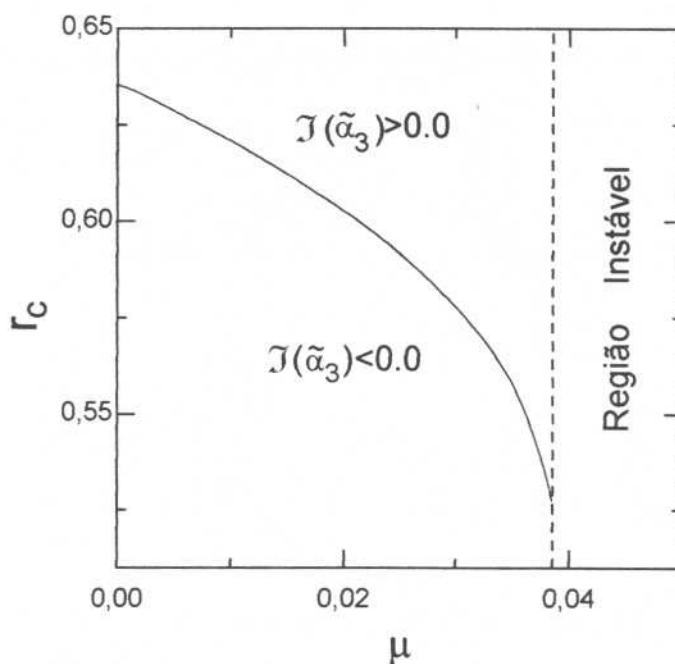


Figura 5.5. Diagrama de r_c versus μ (r_c , raio crítico, é o valor de r_p para o qual $\Im(\tilde{\alpha}_3) = 0$). Para um dado valor de μ , se o corpo perturbador possui $r_p > r_c$, então $\Im(\tilde{\alpha}_3) > 0$. Caso contrário, se $r_p < r_c$, então $\Im(\tilde{\alpha}_3) < 0$.

iii) Para $\mu = \text{Saturno}/(\text{Sol} + \text{Saturno})$ nós temos um efeito contrário já que a ação de Marte e Júpiter ($r_p < r_c$) é fazer com os pontos L_4 e L_5 de Saturno fiquem um pouco menos estáveis. Evidentemente Urano e Netuno ($r_p > r_c$) fazem um efeito contrário mas como Júpiter possui uma massa muito grande, comparada com a destes planetas, nós temos

$$|\epsilon^{(Ma)}\tilde{\alpha}_3^{(Ma)} + \epsilon^{(Ju)}\tilde{\alpha}_3^{(Ju)}| > |\epsilon^{(Ur)}\tilde{\alpha}_3^{(Ur)} + \epsilon^{(Ne)}\tilde{\alpha}_3^{(Ne)}|.$$

Resultados análogos são obtidos para os pontos L_4 e L_5 de Urano e Netuno quando consideramos as perturbações seculares de Marte, Júpiter e Saturno.

Os resultados acima estão mostrados na tabela 5.2.

Tabela 5.2: Parte perturbada do autovalor α_3 .

Planeta	Corpo Perturbador	$\tilde{\alpha}_3$
Marte	Terra	$-4.979 \cdot 10^{-4}i$
	Jupiter	$5.782 \cdot 10^{-5}i$
	Saturno	$8.522 \cdot 10^{-6}i$
Jupiter	Marte	$-5.437 \cdot 10^{-2}i$
	Saturno	$3.297 \cdot 10^{-2}i$
	Urano	$2.521 \cdot 10^{-3}i$
	Netuno	$6.066 \cdot 10^{-4}i$
Saturno	Marte	$-3.126 \cdot 10^{-2}i$
	Jupiter	$-1.604 \cdot 10^{-2}i$
	Urano	$1.195 \cdot 10^{-2}i$
	Netuno	$2.293 \cdot 10^{-3}i$
Urano	Jupiter	$-1.169 \cdot 10^{-2}i$
	Saturno	$-8.176 \cdot 10^{-3}i$
	Netuno	$1.492 \cdot 10^{-2}i$
Netuno	Jupiter	$-1.323 \cdot 10^{-2}i$
	Saturno	$-1.234 \cdot 10^{-2}i$
	Urano	$2.316 \cdot 10^{-4}i$

Recentemente as estabilidades destes pontos, a exceção dos pontos L_4 e L_5 de Marte, foram estudados por Mikkola e Innanen, 1992, e por Holman e Wisdom, 1993. Em ambos os casos estudou-se, na escala de tempo de 20 milhões de anos, a estabilidades de partículas testes em torno dos pontos lagrangeanos dos planetas jovianos, considerando as mútuas perturbações entre estes planetas e situações reais para os modelos adotados (todas as órbitas sendo elípticas e possuindo inclinações). Mikkola e Innanen também estudaram o problema planar elíptico. As investigações foram feitas empregando-se métodos numéricos: integrador numérico (Burlirsch-Stoer) no caso de Mikkola e Innanen, e técnica de mapeamento simplético no caso de Holman e Wisdom. Os resultados obtidos nos dois trabalhos foram idênticos: Assim como Júpiter, Urano e Netuno mostraram que também podem possuir os seus "asteróides do tipo Troiano". Já para Saturno, ao contrário, os resultados mostraram serem instáveis os seus pontos L_4 e L_5 . Na verdade, em torno dos pontos equilaterais de Saturno existe uma região estável que por sua vez possui uma subregião instável (no trabalho de Holman e Wisdom estas regiões estão bastante evidenciadas). Neste caso, Innanen e Mikkola, 1989, sugeriram que a quase ressonância 5:2 entre Júpiter e Saturno é a possível causa da instabilidade. Este resultado para Saturno também foi obtido por nós para o problema elíptico pla-

nar, aonde empregamos o método proposto por Wisdom e Holman, 1991 (no próximo capítulo nós comentaremos o mapeamento proposto por Wisdom e Holman). Para o mesmo problema, só que considerando órbitas circulares para os planetas (o que está em conformidade com os modelos analisados por nós), os pontos L_4 e L_5 de Saturno mostraram serem estáveis, não apresentando a mencionada subregião instável. Este dado reforça, ao nosso ver, a hipótese proposta por Inannen e Mikkola para explicar a instabilidade dos pontos equilaterais de Saturno. Como nós estamos adotando um modelo secular, considerando as órbitas dos primários e dos corpos perturbadores como circulares, então os efeitos como o da ressonância 5:2 não são objetos de estudo deste trabalho.

Um ponto interessante a ser destacado, foi a diferença apresentada nos resultados do problema elíptico para o problema circular. No modelo elíptico as regiões estáveis em torno dos pontos L_4 e L_5 são consideravelmente menores em área (na comparação nós só analisamos os problemas planares). Além disso, também no caso elíptico o efeito do corpo perturbador tem uma importância muito maior se comparado com o caso circular. Aliás, no problema circular o efeito do corpo perturbador é muito pequeno como pode ser visto na figura 5.6. Nesta figura, nós integramos (usando o mapeamento geral de Wisdom e Holman, 1991) as órbitas de 648 partículas testes com longitudes médias iniciais variando de 0° até 355° e semi-eixos maior da órbita iniciais variando de 0.96 até 1.04 (em unidades normalizadas, a distância entre os dois primários é igual a unidade). As longitudes e semi-eixos mostrados nos diagramas correspondem aos valores iniciais das partículas teste que permanecem, durante toda a integração, com estes elementos nos seguintes intervalos:

$(10^\circ - 160^\circ) \rightarrow$ longitude media.

$(0.5, 1.5) \rightarrow$ semi - eixo maior.

Em ambos diagramas foi considerado $\mu = Jupiter/(Sol + Jupiter)$, sendo que no da direita considerou-se também Saturno como um corpo perturbador, com órbita sempre circular (conforme foi feito no estudo das perturbações dos autovalores). O intervalo

de tempo da integração foi de 1000 vezes o período da órbita de Júpiter. Comparando ambos diagramas nós constatamos que a ação do corpo perturbador, no caso Saturno, foi realmente muito pequena. Este fato corrobora o que foi mencionando anteriormente por nós quando afirmamos que o efeito das perturbações sobre os autovalores de Marte e dos planetas jovianos é muito pequena.

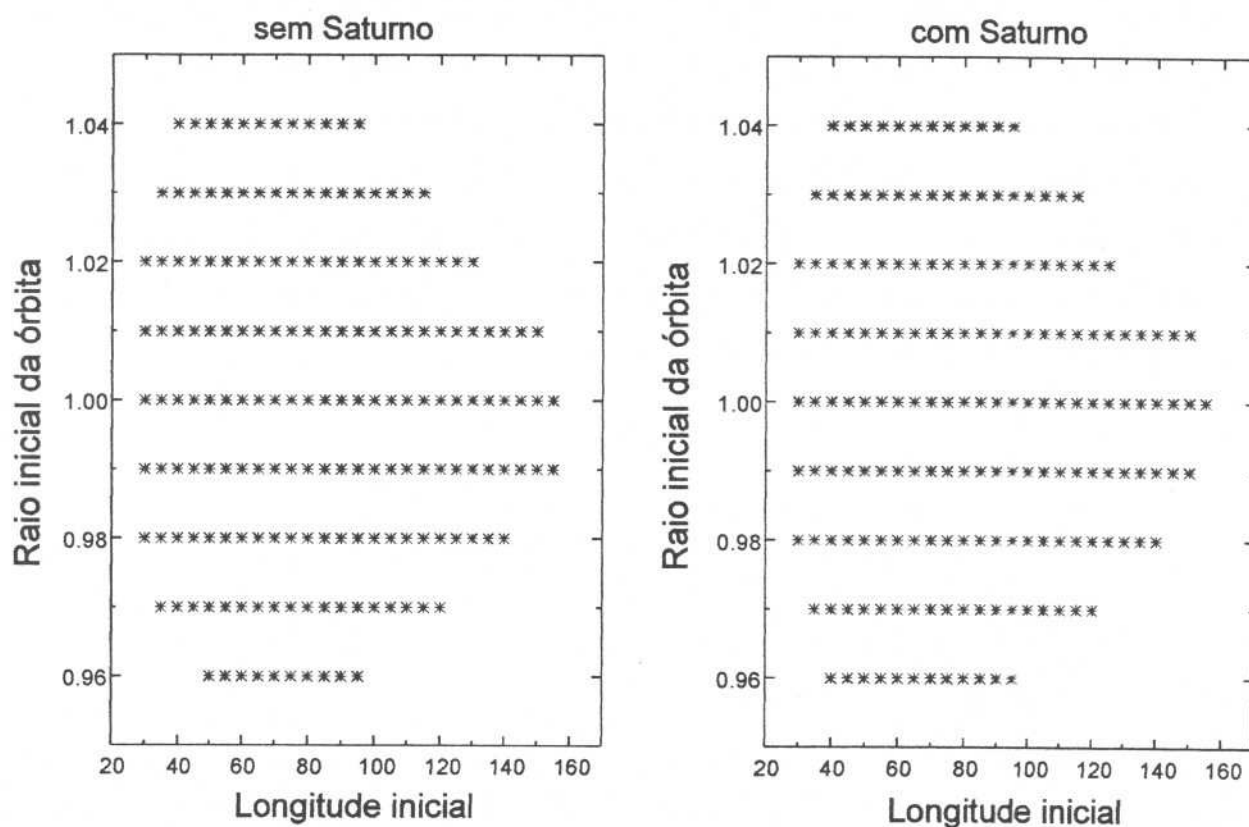


Figura 5.6. Longitudes e semi-eixos maior iniciais para partículas teste em órbitas na região em torno do ponto L_4 de Júpiter. No diagrama da esquerda considerou-se o problema não perturbado, enquanto no diagrama da direita considerou-se Saturno como o corpo perturbador.

Sobre Marte nós destacamos aqui a recém descoberta do seu primeiro satélite do tipo lagrangeano: 1990MB (Holt, 1990, Bowell, 1990, Kinoshita, 1990).

Uma situação que também chama atenção é o caso de um sistema com razão de massa próxima da razão de massa crítica, ou seja

$$\mu = 0.038 < \mu_c \approx 0.03852\dots$$

Este é um caso aonde os autovalores α_3 e α_5 (autovalores com diferentes assinaturas) estão bastante próximos um do outro, o que justifica, neste caso, a análise dos deslocamentos de ambos autovalores. As curvas associadas a $\Im(\tilde{\alpha}_3)$ e $\Im(\tilde{\alpha}_5)$ estão mostradas na figura 5.7. Nelas, nós podemos observar que a colisão entre estes autovalores podem ocorrer para um corpo perturbador com $r_p > r_c \approx 0.533$, o que poderia resultar na perda da estabilidade. Obviamente, dependendo da posição do corpo perturbador, também a massa do corpo perturbador deverá ter um valor mínimo para que a colisão entre α_3 e α_5 possa ocorrer.

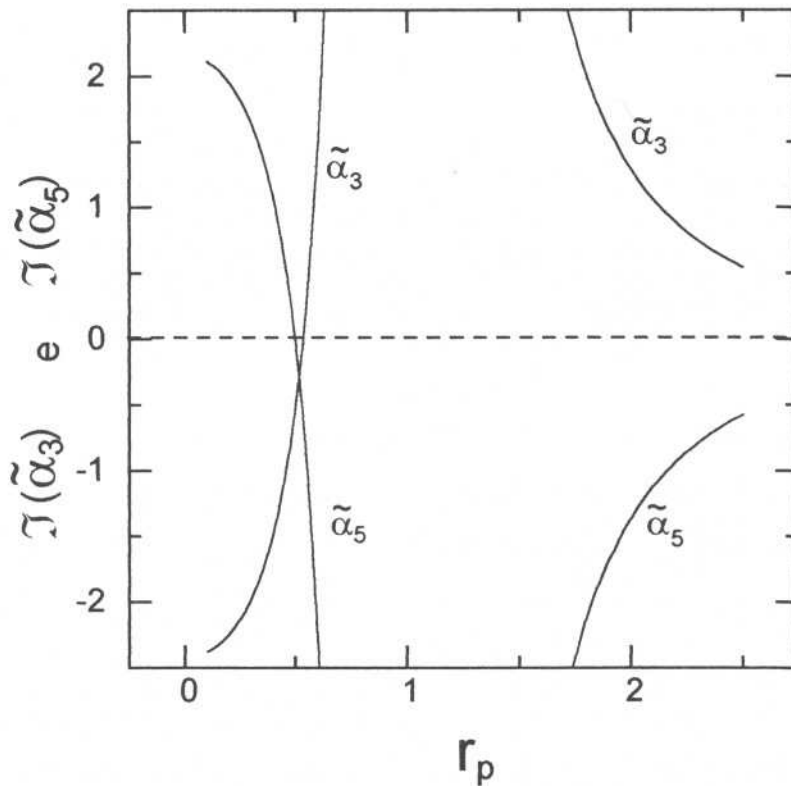


Figura 5.7. Diagrama de $\Im(\tilde{\alpha}_3)$ e $\Im(\tilde{\alpha}_5)$ para um sistema com razão de massa $\mu = 0.038$.

5.4 Satélites Geoestacionários.

Para este problema a expressão para $\epsilon V(x, t)$ é a mesma do problema anterior, só que neste caso

$$\epsilon = \frac{M_{\text{corpo perturbador}}}{M_{\text{planeta}}}.$$

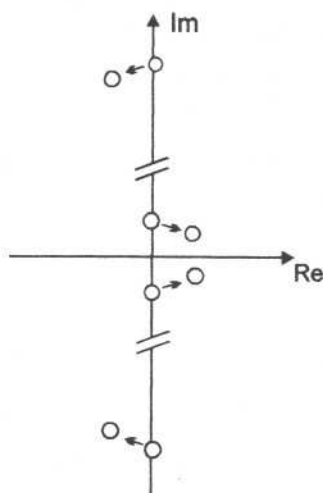


Figura 5.8. Autovalores para um satélite geoestacionário perturbado pela Lua.

Para a Terra nós consideramos $J_2 = 1.082626 \cdot 10^{-3}$ e $\xi = 3.21 \cdot 10^{-5}$. O corpo perturbador considerado foi a Lua, aonde consideramos a sua órbita também como circular. Assim, nós temos que

$$\omega_p = 0.006074, \quad \Omega = -0.166407 \cdot t, \quad \bar{r} = 3.30540$$

$$r_p = 30.134196, \quad I = 0.357 \text{rad.}$$

Estes valores foram extraídos do Astronomical Almanac.

Para normalizarmos este problema nós mudamos as unidades de modo que

$$M_{\text{Terra}} = 1 \quad (\text{unidades de massa}),$$

$$G \cdot M_{\text{Terra}} = 1 \quad \frac{(\text{unidade de comprimento})^3}{(\text{unidade de massa}) \cdot (\text{unidade de tempo})^2},$$

$$R_e = 0.5 \quad (\text{unidade de comprimento}).$$

O resultado para esta perturbação é

$$\tilde{\alpha}_1 = -0.00015i, \quad \tilde{\alpha}_3 = 0.01021i, \quad \tilde{\alpha}_5 = -0.00016i.$$

Na figura 5.8 nós mostramos estes resultados.

CAPÍTULO 6

Mapeamentos para Problemas Dissipativos da Dinâmica Orbital.

Nos últimos anos o emprego dos métodos numéricos tem-se intensificado principalmente devido as facilidades computacionais que vem surgindo ano após ano. Em dinâmica orbital estes métodos tornam-se essenciais principalmente quando o objetivo é estudar o comportamento das órbitas para longos períodos, ou quando o sistema em questão envolve muitos corpos submetidos a perturbações gravitacionais e/ou não-gravitacionais. Nestes problemas, um ponto que tem mostrado ser de fundamental importância é o tempo de computação. Em muitos casos, a despeito de todo o progresso observado na área dos computadores, o tempo de integração tem sido tão essencial a ponto de restringir os tipos de máquinas e métodos a serem empregados nas suas análises.

As análises numéricas de problemas conservativos, hamiltonianos, avançaram muito nos últimos anos também graças ao emprego dos mapeamentos simpléticos. Em alguns casos específicos, a utilização dos mapeamentos tem representado um ganho da ordem de 20 vezes na velocidade de processamento se comparado com os métodos de integração tradicionais. Este fato faz dos mapeamentos uma importante ferramenta a ser utilizada nos estudos que envolvem integrações de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Infelizmente o emprego dos mapeamentos em problemas envolvendo forças dissipativa ainda não tem sido feito com a mesma intensidade que observamos nos problemas conservativos. Nos problemas conservativos, a estrutura hamiltoniana facilita muito o desenvolvimento de tais mapeamentos, o que infelizmente não acontece nos problemas dissipativos.

Neste capítulo, nós apresentamos um método geral para a construção de mapea-

mentos que serve tanto para problemas conservativos como para problemas envolvendo forças dissipativas. De que temos notícia, este é um dos primeiros mapeamentos a ser empregado em problemas da dinâmica orbital envolvendo estes tipos de forças. O nosso objetivo ao, desenvolvê-lo, foi o de aplicá-lo ao estudo de pequenas partículas próximas aos pontos L_4 e L_5 , o que será apresentado no próximo capítulo. Para efeito de comparação, nós aplicaremos o mapeamento dissipativo ao problema de três corpos, Sol-planeta-partícula, estando a partícula também submetida ao arrasto de Poynting-Robertson. Os resultados obtidos foram confrontados com os resultados fornecidos pelos integradores RADAU (16ª ordem) e ODE (integrador de passo variável desenvolvido em Los Alamos).

6.1 O Mapeamento Geral de Wisdom e Holman.

A principal fonte de inspiração para o desenvolvimento dos mapeamentos simpléticos usados em problemas da dinâmica orbital foi o trabalho Chirikov, 1979 (em Stuchi, 1991, há um capítulo inteiramente dedicado a este mapeamento). Neste trabalho Chirikov fez uso da sequência periódica de funções deltas de Dirac

$$\delta_{2\pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(nt) \quad (6.1)$$

que introduzida no hamiltoniano para um pêndulo simples permitiu obter o conhecido *Mapeamento Standard* de Chirikov (além do trabalho de Chirikov, também em Wisdom e Holman, 1991, há uma dedução, aliás muito simples, do Mapeamento Standard).

O primeiro emprego dos mapeamentos em problemas relacionados a Mecânica Celeste foi feito por Wisdom, 1982. Neste trabalho ele separou analiticamente o hamiltoniano em partes com diferentes escalas de tempos. Uma parte representou a interação de cada corpo com o corpo central, e outra parte considerou todos os termos que oscilam rapidamente com dependência na longitude média, mas não estando relacionados às ressonâncias (estes termos, na verdade, não são considerados pelo mapeamento devido ao emprego do princípio da média). Além dessas partes, existe uma considerando

CAPÍTULO 6

Mapeamentos para Problemas Dissipativos da Dinâmica Orbital.

Nos últimos anos o emprego dos métodos numéricos tem-se intensificado principalmente devido as facilidades computacionais que vem surgindo ano após ano. Em dinâmica orbital estes métodos tornam-se essenciais principalmente quando o objetivo é estudar o comportamento das órbitas para longos períodos, ou quando o sistema em questão envolve muitos corpos submetidos a perturbações gravitacionais e/ou não-gravitacionais. Nestes problemas, um ponto que tem mostrado ser de fundamental importância é o tempo de computação. Em muitos casos, a despeito de todo o progresso observado na área dos computadores, o tempo de integração tem sido tão essencial a ponto de restringir os tipos de máquinas e métodos a serem empregados nas suas análises.

As análises numéricas de problemas conservativos, hamiltonianos, avançaram muito nos últimos anos também graças ao emprego dos mapeamentos simpléticos. Em alguns casos específicos, a utilização dos mapeamentos tem representado um ganho da ordem de 20 vezes na velocidade de processamento se comparado com os métodos de integração tradicionais. Este fato faz dos mapeamentos uma importante ferramenta a ser utilizada nos estudos que envolvem integrações de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Infelizmente o emprego dos mapeamentos em problemas envolvendo forças dissipativa ainda não tem sido feito com a mesma intensidade que observamos nos problemas conservativos. Nos problemas conservativos, a estrutura hamiltoniana facilita muito o desenvolvimento de tais mapeamentos, o que infelizmente não acontece nos problemas dissipativos.

Neste capítulo, nós apresentamos um método geral para a construção de mapea-

mentos que serve tanto para problemas conservativos como para problemas envolvendo forças dissipativas. De que temos notícia, este é um dos primeiros mapeamentos a ser empregado em problemas da dinâmica orbital envolvendo estes tipos de forças. O nosso objetivo ao, desenvolve-lo, foi o de aplicá-lo ao estudo de pequenas partículas próximas aos pontos L_4 e L_5 , o que será apresentado no próximo capítulo. Para efeito de comparação, nós aplicaremos o mapeamento dissipativo ao problema de três corpos, Sol-planeta-partícula, estando a partícula também submetida ao arrasto de Poynting-Robertson. Os resultados obtidos foram confrontados com os resultados fornecidos pelos integradores RADAU (16ª ordem) e ODE (integrador de passo variável desenvolvido em Los Alamos).

6.1 O Mapeamento Geral de Wisdom e Holman.

A principal fonte de inspiração para o desenvolvimento dos mapeamentos simpléticos usados em problemas da dinâmica orbital foi o trabalho Chirikov, 1979 (em Stuchi, 1991, há um capítulo inteiramente dedicado a este mapeamento). Neste trabalho Chirikov fez uso da sequência periódica de funções deltas de Dirac

$$\delta_{2\pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(nt) \quad (6.1)$$

que introduzida no hamiltoniano para um pêndulo simples permitiu obter o conhecido *Mapeamento Standard* de Chirikov (além do trabalho de Chirikov, também em Wisdom e Holman, 1991, há uma dedução, aliás muito simples, do Mapeamento Standard).

O primeiro emprego dos mapeamentos em problemas relacionados a Mecânica Celeste foi feito por Wisdom, 1982. Neste trabalho ele separou analiticamente o hamiltoniano em partes com diferentes escalas de tempos. Uma parte representou a interação de cada corpo com o corpo central, e outra parte considerou todos os termos que oscilam rapidamente com dependência na longitude média, mas não estando relacionados às ressonâncias (estes termos, na verdade, não são considerados pelo mapeamento devido ao emprego do princípio da média). Além dessas partes, existe uma considerando

as ressonâncias nas longitudes médias (termo ressonante), e outra, a parte secular, que não depende das longitudes. Na parte ressonante, Wisdom introduziu a sequência de funções delta, o que permitiu entre os tempos em que as funções deltas atuam, resolver analiticamente o hamiltoniano uma vez que o termo secular foi truncado nas excentricidades e inclinações. Wisdom argumentou, via princípio de média, que os novos termos de curto período obtidos através da introdução da sequência de funções deltas não têm um papel importante na evolução.

O mapeamento original de Wisdom possui duas importantes limitações : A primeira é que este mapeamento está restrito aos problemas com pequenas excentricidades e inclinações (o termo secular foi obtido considerando assim estes parâmetros orbitais). Já a segunda limitação diz respeito ao fato do mapeamento só valer nas regiões próximas a ressonância a qual baseou-se a representação analítica do hamiltoniano médio.

Em um trabalho posterior, Wisdom e Holman, 1991, apresentaram uma generalização do mapeamento, que embora seja mais lento que o anterior, não apresentou as limitações descritas acima além de ser mais veloz que a maioria dos integradores usualmente usados. Este mapeamento, também desenvolvido exclusivamente para o problema de n-corpos, é obtido via a separação do hamiltoniano na seguinte forma

$$H = H_{Kepler} + H_{Interacoes}, \quad (6.2)$$

aonde H_{Kepler} representa o movimento Kepleriano dos corpos em relação ao corpo central e $H_{Interacao}$ representa as perturbações dos corpos, uns com os outros. Uma vez estando um determinado problema expresso como em 6.2, então adiciona-se os termos de curto período, por meio das funções deltas, o que resulta em

$$H_{Map} = H_{Kepler} + 2\pi \delta_{2\pi}(\Omega t) H_{Interacoes}. \quad (6.3)$$

Assim nós temos a mesma situação já descrita para o mapeamento original de Wisdom. Entre os instantes em que as funções deltas atuam, o movimento é kepleriano e a sua obtenção é feita através das funções f e g de Gauss. Como é conhecido (Danby, 1988;

Brouwer e Clemence, 1961), a partir das posições, x_o , e velocidades, v_o , iniciais ($x_o, v_o \in R^n$), em qualquer tempo determina-se as posições e velocidades através das seguintes relações

$$\begin{aligned}x(t) &= f(t)x_o + g(t)v_o, \\v(t) &= \dot{f}(t)x_o + \dot{g}(t)v_o.\end{aligned}$$

A obtenção dos valores de f e g , e consequentemente de \dot{f} e \dot{g} , é feita resolvendo a equação de Kepler, na forma de uma equação de diferença (Danby, 1988)

$$\Delta M = n \cdot \Delta t = \Delta E - e \cos E_o \sin \Delta E + e \sin E_o (1 - \cos \Delta E). \quad (6.4)$$

Um método eficiente (e impressionantemente rápido) para a determinação das funções é encontrado em Danby, 1988.

Já nos instantes $t_o + n \cdot \frac{2\pi}{\Omega}$ (instantes aonde atuam as funções deltas) as coordenadas e momentos são determinados por meio de

$$\begin{aligned}p'_i &= p_i - \frac{2\pi}{\Omega} \frac{\partial H_{Int.}}{\partial q_i}(p, q), \\q'_i &= q_i + \frac{2\pi}{\Omega} \frac{\partial H_{Int.}}{\partial p_i}(p', q).\end{aligned}$$

aonde as plicas correspondem aos novos momentos e as novas coordenadas.

A eficiência do mapeamento está no fato de H_{Kepler} ser a parte que contém o "essencial" sobre o movimento do problema. Este é o fato que permite estabelecer intervalos de tempos razoavelmente grandes (se comparados com os passos adotados usualmente por integradores) entre os instantes em que atuam as funções deltas, o que explica, em boa parte, o porque destes mapeamentos necessitem, em geral, de pouco tempo de processamento.

De um modo geral, o mapeamento de Wisdom e Holman é muito simples na sua concepção, embora dê algum trabalho na sua implantação. O hamiltoniano do problema de n-corpos

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p_i^2}{2m_i} - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \quad (6.5)$$

primeiramente tem que ser posto na forma dada pelo hamiltoniano (6.2). Isto foi feito transformando as coordenadas originais nas coordenadas de Jacobi (ver também Hagihara, 1970).

6.2 O Mapeamento Dissipativo.

O mapeamento que estamos propondo possui muito das idéias contidas no mapeamento de Wisdom e Holman, embora possua uma importante diferença a ser destacada: enquanto os mapeamentos descritos anteriormente são desenvolvidos a partir de um hamiltoniano, no mapeamento dissipativo, de modo diferente, parte-se diretamente das equações do movimento do problema, expressas em coordenadas do tipo cartesianas. A primeira etapa na obtenção do mapeamento é expressar as equações do movimento em variáveis retangulares de modo que possa ser separado em duas partes: uma parte que esteja relacionada ao movimento Kepleriano e outra parte que contenha todas as demais interações (perturbações) gravitacionais e "forças dissipativas". Em resumo, o objetivo é expressar as equações do movimento na forma

$$\dot{z} = h_{Kepler} + h_{Interacoes} \quad (6.6)$$

aonde

$$\begin{aligned} h_{Kep} &= (h_K^1, \dots, h_K^{2n})^\dagger, \\ h_{Int} &= (h_I^1, \dots, h_I^{2n})^\dagger, \\ z &= (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)^\dagger. \end{aligned}$$

Como é conhecido (Danby, 1988; Brouwer e Clemence, 1961) para um problema de n-corpos possuindo um corpo com massa predominante (aqui considerado como o n-ésimo corpo) pode-se expressar as equações do movimento referente ao i-ésimo corpo, considerando apenas as interações gravitacionais, na seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= v_i, \\ \dot{v}_i &= -\underbrace{k^2 \frac{(m_n + m_i)}{|r_{in}|^3}}_{h_k} r_i + \underbrace{k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} m_j \left(\frac{r_j - r_i}{|r_{ij}|^3} - \frac{r_j}{|r_{jn}|^3} \right)}_{h_I}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

aonde $r_i = (r_i^1, r_i^2, r_i^3)^\dagger$ e $v_i = (v_i^1, v_i^2, v_i^3)^\dagger$ são os vetores posição e velocidade do i -ésimo corpo em relação ao n -ésimo corpo, e $r_{ij} = r_j - r_i$. Nas equações (6.7) a origem coincide com centro do corpo de maior massa.

Por sua vez, se o i -ésimo corpo também estiver submetido a uma força extra, por exemplo uma força dissipativa dada por

$$F_i = \begin{pmatrix} F_i^1(r_i, v_i) \\ F_i^2(r_i, v_i) \\ F_i^3(r_i, v_i) \end{pmatrix},$$

então para as equações do movimento (correspondendo ao i -ésimo corpo) nós temos que

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= v_i, \\ \dot{v}_i &= \underbrace{-k^2 \frac{(m_n + m_i)}{|r_{in}|^3} r_i}_{h_k} + \underbrace{k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} m_j \left(\frac{r_j - r_i}{|r_{ij}|^3} - \frac{r_j}{|r_{jn}|^3} \right)}_{h_I} + \frac{F_i}{m_i}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Uma vez determinado o sistema (6.8), obtem-se então o mapeamento que propomos pela introdução da sequência de funções deltas nos termos h_I . Então, de modo idêntico ao mapeamento de Wisdom e Holman, entre os instantes em que as funções deltas atuam, o movimento é determinado via as funções f e g de Gauss, e nos instantes em que as funções deltas atuam, as posições e velocidades são determinadas através de

$$\begin{aligned} v_i' &= v_i + \Delta T \cdot h_I, \\ r_i' &= r_i, \end{aligned}$$

aonde ΔT é o passo do mapeamento.

Nós novamente observamos aqui que este mapeamento é mais geral que o mapeamento proposto por Wisdom e Holman. Ele pode ser aplicado tanto aos problemas conservativos puros ($F_i = 0$) ou a problemas que também envolvem forças dissipativas.

O primeiro exemplo em que nós aplicamos o mapeamento dissipativo foi ao problema Sol-planeta-partícula, estando também a partícula sujeita a pressão da radiação e

ao arrasto de Poynting-Robertson

$$F_i = \frac{\beta\mu}{c} \left((c - \dot{r}_i) \frac{r_i}{|r_i|^3} - \frac{v_i}{|r_i|^2} \right) \quad (6.9)$$

aonde β é uma constante adimensional, relacionada com os parâmetros físicos da partícula, $\mu = k^2(M_{Sol} + m_{particula})$ e c é a velocidade da luz no vácuo (Burns et al, 1979; Wyatt e Whipple, 1950). Neste exemplo nós consideramos o problema como planar. A excentricidade de Júpiter foi feita igual a 0.05 e para a partícula nós consideramos como parâmetros iniciais o semi-eixo maior igual a 3.34 U.A., a excentricidade da órbita igual a 0.16, e o parâmetro β igual a 0.028. Na figura 6.1 nós mostramos os resultados obtidos para o semi-eixo maior com as integrações feitas pelo integrador RADAU com precisão de 10^{-8} , diagrama da esquerda, e pelo mapeamento dissipativo, diagrama da direita. O tempo total de integração foi de 60000 anos, e adotamos um passo de 0,6 anos para o mapeamento. Nestas figuras nós também destacamos as transições bruscas sofridas pelo movimento da partícula nas principais ressonância com Júpiter. De um modo semelhante, nós mostramos na figura 6.2 os resultados obtidos para as excentricidades, só que reduzindo o passo do mapeamento para 0.03 anos (≈ 10 dias), uma vez que o erro obtido mostrou ser maior para este parâmetro. Os resultados do mapeamento foram obtidos em um micro-computador do tipo PC-386DX-40Mhz, que no caso dos resultados para os semi-eixos levou cerca de 15 minutos de processamento, enquanto o resultado do integrador RADAU foi obtido em uma estação SUN, Sparck 1+, que precisou de cerca de 45 minutos para fornece-los. É importante mencionar que a estação SUN não estava dedicada exclusivamente ao processamento da integração. Pelo menos uma outra tarefa também estava sendo processada pela SUN.

Um outro teste que também foi efetuado está representado na figura 6.3. Nele nós também consideramos um problema planar de três corpos, Sol-Terra-partículas. A Terra foi considerada com uma excentricidade igual a zero e as partículas foram tidas como possuindo semi-eixos-maior iniciais iguais a 1.305 U.A., excentricidades iniciais iguais a 0.1 e os parâmetros β iguais a 0.03. As longitudes médias iniciais de cada uma das 120 partícula variaram no intervalo de 0° a 120° . Ao fim de 750 anos de integração, para cada partícula, tomou-se o valor do semi-eixo final. Embora não esteja fácil de ver, esta

figura mostra duas curvas (que estão praticamente sobrepostas). Uma foi obtida pelo integrador RADAU e a outra pelo mapeamento. No caso do mapeamento o tempo de processamento no micro-computador PC (386 DX40) foi aproximadamente de 12 horas enquanto o integrador RADAU precisou de 4 dias de processamento efetuados na estação SUN, já mencionada anteriormente. As mesmas ressalvas feitas sobre o desempenho da estação SUN na obtenção das figuras 6.1 e 6.2 são aqui repetidas.

O objetivo deste teste foi demonstrar a eficácia do mapeamento dissipativo em problemas envolvendo captura por ressonância. Por este motivo a partícula foi tida com um semi-eixo maior que a Terra (condição típica para a ocorrência de capturas por ressonância). Recentemente, em um trabalho que está sendo desenvolvido no Observatório Nacional, demonstrou-se que o processo de captura por ressonância é caótico no sentido de que pequenas diferenças nos parâmetros orbitais da partícula levam a diferentes valores para o semi-eixo aonde ocorrem as capturas. Por este motivo, com o intuito de minimizarmos este efeito, a partícula foi considerada com um valor do semi-eixo maior inicial da órbita muito próximo a ressonância 3:2.

Das comparações feitas nas figuras 6.1, 6.2 e 6.3 nós temos que o mapeamento dissipativo mostrou ser válido como uma ferramenta para a integração numérica de órbitas. Em relação a velocidade de processamento, é importante destacar que o integrador RADAU com precisão de 10^{-5} mostrou ser, em alguns casos, tão veloz quanto o mapeamento, levando a resultados semelhantes ao fornecido pelo mapeamento. Entretanto, quando comparado com o integrador ODE, o mapeamento mostrou ser consideravelmente mais veloz mesmo quando o integrador ODE foi empregado com baixa precisão (10^{-4}).

6.3 Métodos Mistos para a Integração de Órbitas.

O que Wisdom e Holman fizeram no mapeamento geral, e que nós também adotamos no desenvolvimento do mapeamento dissipativo, foi separar o problema de deter-

minação da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias em duas partes: uma parte que contém o que chamamos de as características principais e mais relevantes do problema, cuja solução deva ser obtida pelo meio mais eficiente possível (que no caso dos mapeamentos descritos foram obtidas via as funções f e g de Gauss), e uma outra parte, considerada como uma "pequena" perturbação da primeira parte, cuja determinação é feita via o emprego das funções delta de Dirac. Assim, baseado nestes fatos, temos um método para a resolução das equações de movimento cuja principal característica está na liberdade de escolha das ferramentas numéricas a serem usadas nos processos de integração das equações do movimento. Para compreendermos melhor este método nós vamos supor um problema que seja descrito via uma função hamiltoniana

$$H(q, p),$$

quando consideramos apenas uma parte das forças e interações envolvidas, e que também possua outros termos envolvidos cuja representação é dada por

$$h_{Int}(Q, P),$$

aonde $h_{Int} = (h_I^1, \dots, h_I^{2n})^\dagger$, e $Q, P \in R^n$. Se o efeito dos termos h_{Int} puder ser considerado como uma "pequena" perturbação no movimento contido no hamiltoniano H , então nós podemos desenvolver um método para a integração do movimento deste hipotético problema determinando numericamente as soluções do hamiltoniano entre os intervalos de tempo ΔT e calculando

$$P' = P + \Delta T \cdot h_{Int}(Q, P) \tag{6.10a}$$

$$Q' = Q + \Delta T \cdot h_{Int}(Q, P') \tag{6.10b}$$

nos instantes $t_o + n\Delta T$ ($n = 1, 2, \dots$). É evidente que antes do cálculo de (6.10), os valores encontrados para as coordenadas e momentos q e p (que foram obtidos integrando o hamiltoniano H) devem ser transformados para as coordenadas e momentos Q e P , que por sua vez, após o cálculo de (6.10), devem novamente serem transformados para q e p , para que se possa efetuar uma nova integração de H . Este processo é repetido até atingir o tempo final de integração.

Assim como no mapeamento, a precisão deste método está relacionada com o fato de h_{Int} ser considerada pequena quando comparada ao hamiltoniano H . Quanto menor for h_{Int} , maior será a precisão do método. Em h_{Int} nós podemos incluir as interações de ordem gravitacional e forças dissipativas (de modo semelhante como fizemos em (6.8)). Também, enquanto q e p devem ser necessariamente variáveis canônicas, para Q e P esta condição não é necessária. O hamiltoniano H pode ser resolvido via funções f e g de Gauss, se isto for possível, ou via algum outro processo numérico (por exemplo um integrador numérico).

Um teste foi feito por nós aonde consideramos um problema planar de três corpos, Sol-Terra-partícula, estando a partícula sujeita ao arrasto de Poynting-Robertson. Para o hamiltoniano nós consideramos a expressão (6.5) (neste teste mantivemos no hamiltoniano a ação do planeta sobre a partícula), ficando em h_{Int} apenas a força dissipativa devida ao efeito de Poynting-Robertson. O hamiltoniano foi então integrado por um integrador simplético de 4ª ordem (Yoshida, 1990; Forest e Ruth, 1990). O passo adotado foi escolhido de modo a permitir que este método fornecesse os mesmos valores que o integrador ODE com uma precisão de 10^{-9} . Este teste ilustra muito bem o porque de chamarmos o presente método de *misto*. Nele nós utilizamos um integrador numérico especialmente desenvolvido para problemas hamiltonianos (o integrador simplético de Yoshida, Forest e Ruth) em conjunto com o mapeamento dado por (6.10). Em termos de velocidade de processamento, este teste mostrou que o método misto é da ordem de duas vezes mais veloz que o integrador ODE, quando processados em uma mesma máquina (este último método será empregado no próximo capítulo).

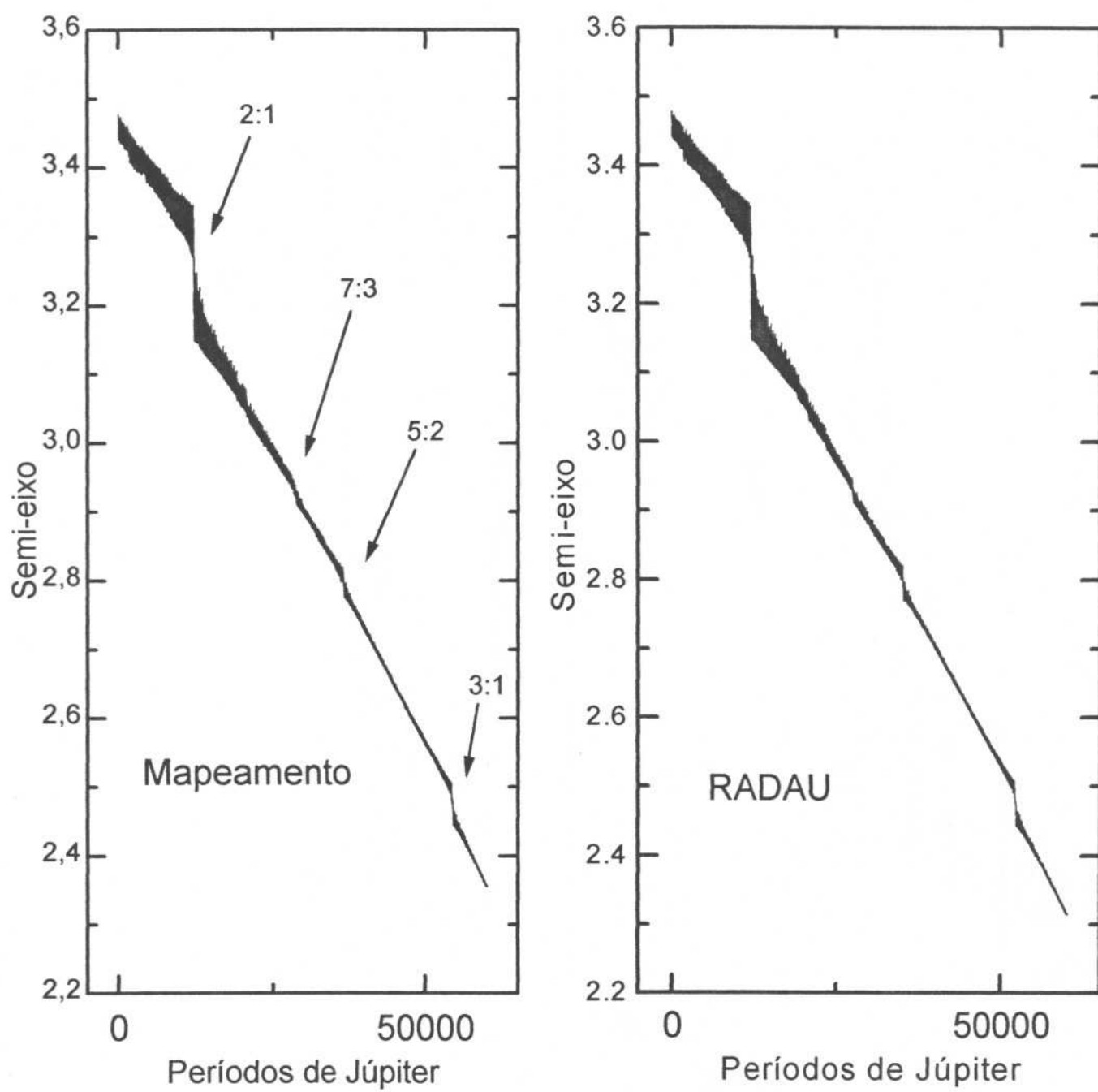


Figura 6.1.: Comparação das integrações obtidas com o integrador RADAU e com o mapeamento, para o semi-eixo maior.

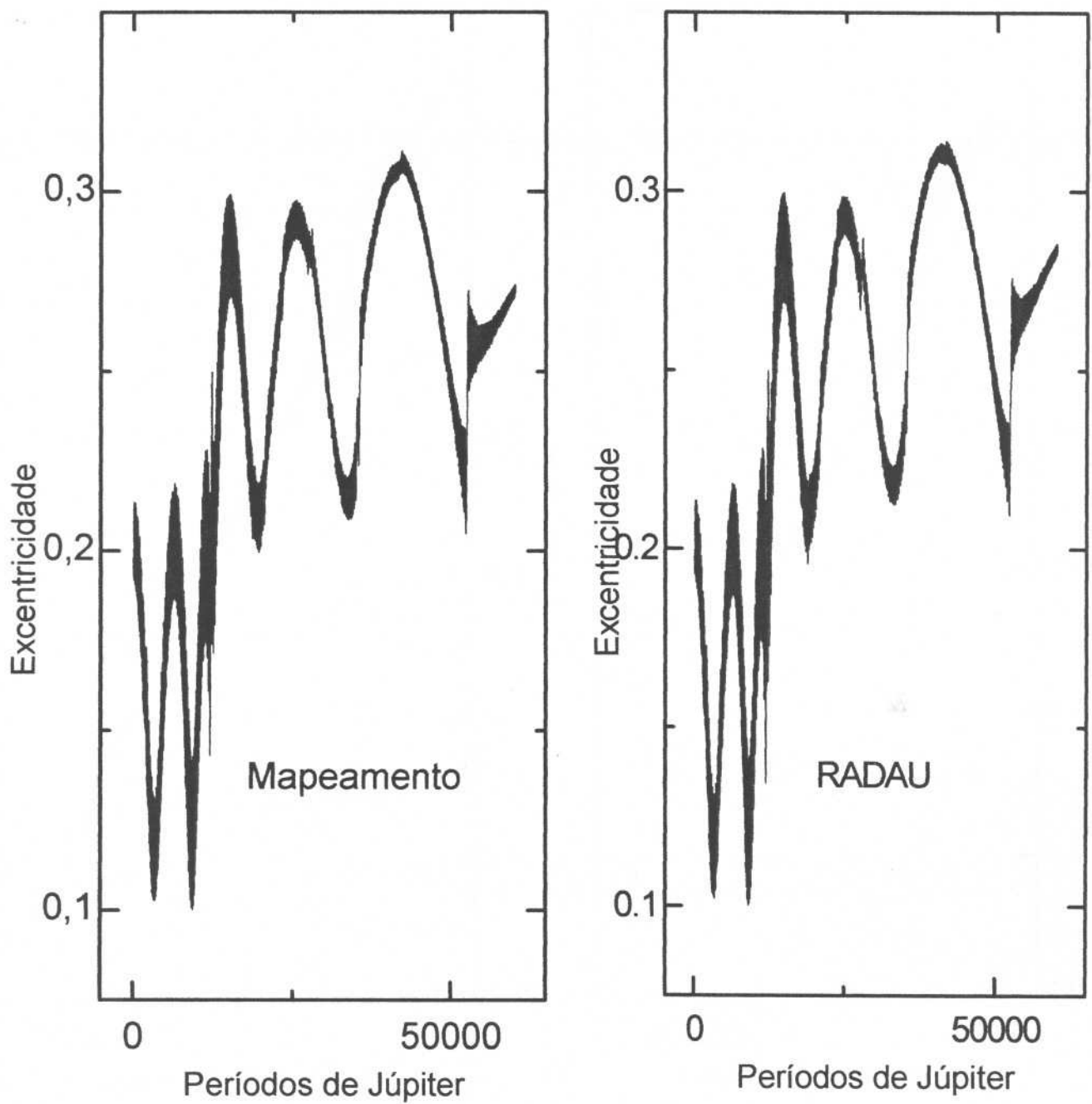


Figura 6.2.: Comparação das integrações obtidas com o integrador RADAU e com o mapeamento, para a excentricidade.

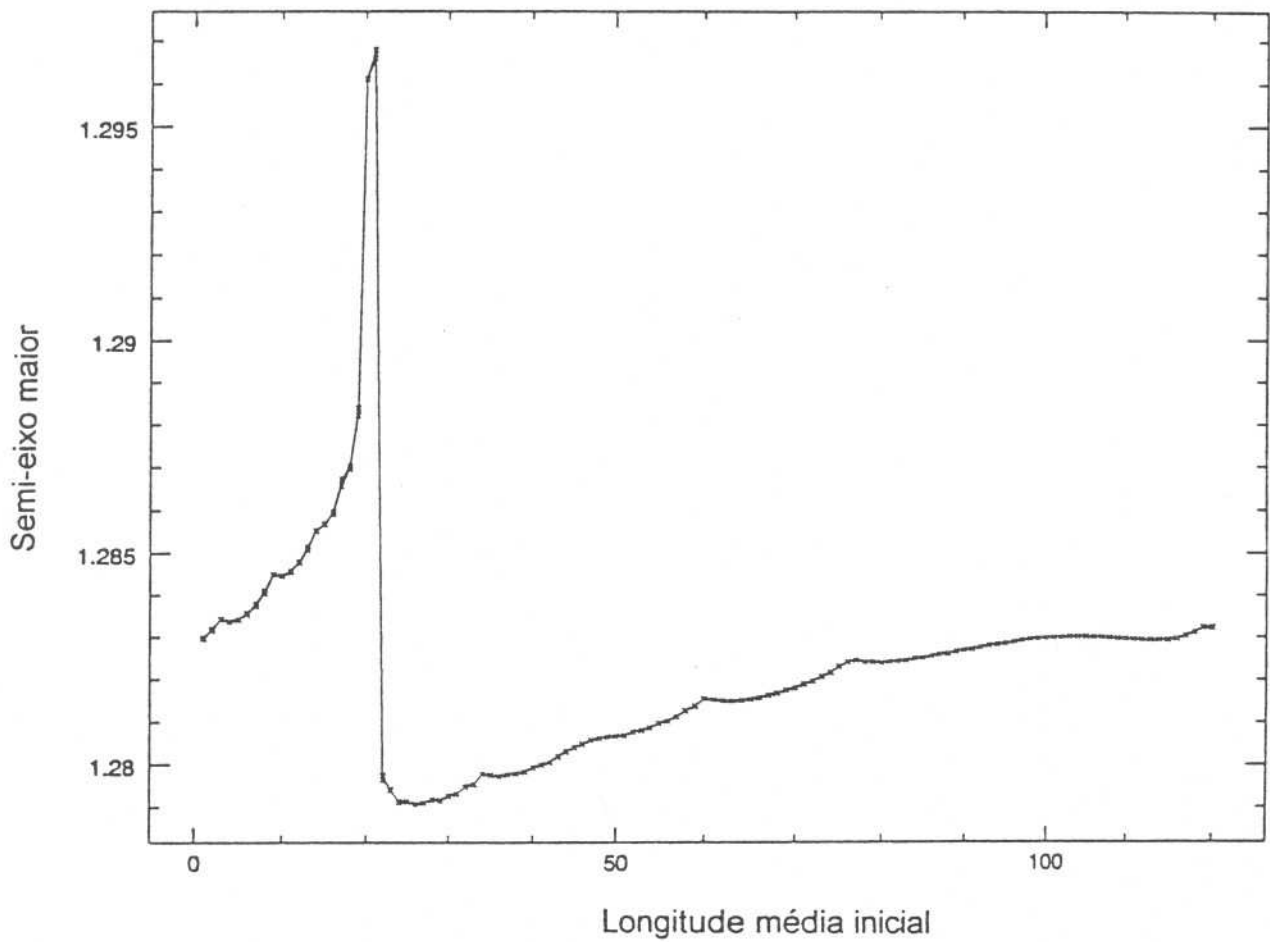


Figura 6.3.: Semi-eixos finais versus longitudes médias iniciais, obtidas pelo integrador Radau e pelo mapeamento.

CAPÍTULO 7

Estabilidade Linear de Problemas Dissipativos

Até o momento, toda a análise da estabilidade que fizemos referiu-se aos problemas envolvendo apenas as perturbações conservativas. Entretanto, as forças dissipativas também são muito importantes no Sistema Solar atual, principalmente quando o corpo a ter o seu movimento estudado é considerado "muito pequeno". Neste último capítulo nós empregaremos algumas das técnicas desenvolvidas nos capítulos anteriores para estudar a análise da estabilidade linear de problemas dissipativos. Nós começaremos este estudo analisando os deslocamentos sofridos pelos pontos de equilíbrio, e o terminamos ao examinar o efeito causado pelos autovalores perturbados sobre o movimento de uma partícula na ressonância 1:1 com Júpiter, sob a ação do efeito de Poynting-Robertson.

7.1 Um Hamiltoniano Heliocêntrico para o Problema Restrito

Neste capítulo nós consideramos como exemplo de força dissipativa apenas a força devida ao efeito Poyntig-Robertson. Como pode ser observado de (6.9), esta força depende do vetor r_i que fornece a posição relativa da partícula em relação ao Sol. Daí ser natural (embora não seja necessário) expressar as equações do movimento da partícula (sujeita ao arrasto de Poynting-Robertson) em um sistema heliocêntrico. As equações (6.8) são deste tipo, mas como a análise que desenvolvemos aqui se baseia fundamentalmente em um sistema hamiltoniano que é perturbado, então nós construiremos um hamiltoniano para o problema heliocêntrico, em coordenadas retangulares, levando em conta um sistema que está girando (sistema aonde aparecem os pontos de equilíbrio no PRTC), e adaptamos a expressão do arrasto de Poynting-Robertson para este sistema.

Para um sistema de referência girando, cuja origem coincide com o centro de massa, nós temos que o lagrangeano do Problema Restrito, planar e circular, é dado por (ver,

por exemplo, Broucke, 1966)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (7.1)$$

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + y^2,$$

$$r_2^2 = (x - x_2)^2 + y^2,$$

sendo que os sub-índices 1 e 2 referem-se ao primário 1 (Sol) e ao primário 2 (planeta), respectivamente, e μ é a razão de massa dada por (4.2a). Diferentemente dos capítulos anteriores, aqui x é considerada uma coordenada cartesiana ($x \in R$) e não um vetor.

Para obtermos o novo Lagrangeano nas coordenadas heliocêntricas, a partir do Langrageano (7.1), basta fazermos a seguinte translação

$$x = X - \mu \quad \text{e} \quad y = Y,$$

que substituída em (7.1) fornece

$$L = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + (X\dot{Y} - \dot{Y}X) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - \mu X + \frac{1}{2}\mu^2 - \mu Y, \quad (7.2)$$

sendo

$$r_1^2 = X^2 + Y^2, \quad (7.3a)$$

$$r_2^2 = (X - 1)^2 + Y^2. \quad (7.3b)$$

Para os momentos canônicos nós temos

$$P_X = \dot{X} - Y, \quad (7.4a)$$

$$P_Y = \dot{Y} + X - \mu, \quad (7.4b)$$

e para o novo hamiltoniano nós encontramos

$$H = \frac{1}{2}(P_X^2 + P_Y^2) + (P_X Y - X P_Y) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} + \mu P_Y. \quad (7.5)$$

O arrasto de Poynting-Robertson também pode ser expresso nas novas variáveis. Para isto nós expressamos v e \dot{r} (tomados no sistema inercial) em termos de X , Y , P_X e P_Y . Para v nós temos

$$v = V + \vec{\omega} \wedge r = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_X + (1 - \omega)Y \\ P_Y - (1 - \omega)X + \mu \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

aonde V é a velocidade no sistema não inercial. Assim, considerando (7.4) e (7.5), nós temos que a pressão de radiação mais o arrasto de Poynting-Robertson no novo sistema é dado por

$$F = \frac{\beta\mu}{c} \left[\left(c - \frac{X(P_X + Y) + Y(P_Y - X + \mu)}{|r|} \right) \frac{1}{|r|^3} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \frac{1}{|r|^2} \begin{pmatrix} P_X + (1 - \omega)Y \\ P_Y - (1 - \omega)X + \mu \end{pmatrix} \right]. \quad (7.7)$$

E finalmente para o sistema de equações do movimento perturbado nós temos que

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial P_X} = P_X + Y, \quad (7.8a)$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial H}{\partial P_Y} = P_Y - X + \mu, \quad (7.8b)$$

$$\dot{P}_X = \frac{\partial H}{\partial X} + F_X = P_Y - \frac{(1 - \mu)X}{|r_1|^3} - \frac{\mu(X - 1)}{|r_2|^3} + F_X \quad (7.8c)$$

$$\dot{P}_Y = \frac{\partial H}{\partial Y} + F_Y = -P_X - \frac{(1 - \mu)Y}{|r_1|^3} - \frac{\mu Y}{|r_2|^3} + F_Y \quad (7.8c)$$

aonde F_X e F_Y são as componentes da força de Poynting-Robertson na direção de X e Y , respectivamente.

7.2 pontos de equilíbrio Perturbados

Como sabemos, os pontos de equilíbrio perturbados são dados por

$$JDH(\bar{\mathbf{X}}) + F(\bar{\mathbf{X}}) = 0,$$

aonde $\mathbf{X} = (X, Y, P_X, P_Y)^\dagger$. Para o problema não perturbado, $F = 0$, pode-se mostrar facilmente que os dois pontos de equilíbrio estáveis são dados por (pontos L_4 e L_5)

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{2}, & \bar{P}_X &= \pm \frac{\sqrt{3}}{-2}, \\ \bar{Y} &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, & \bar{P}_Y &= \frac{1}{2} - \mu. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Já para o problema perturbado, $F \neq 0$, devido, às dificuldades encontradas na obtenção dos novos pontos (perturbados) de equilíbrios, L_4 e L_5 , nós utilizamos as rotinas para soluções de sistemas não-lineares de equações, fornecidas por Press et al, 1989, e determinamos numericamente as soluções do sistema 7.8. Na figura 7.1 nós mostramos no espaço de configuração as posições do ponto L_4 para os diversos valores do parâmetro β (variando o parâmetro β de zero até 0.495 com incrementos de 0.005).

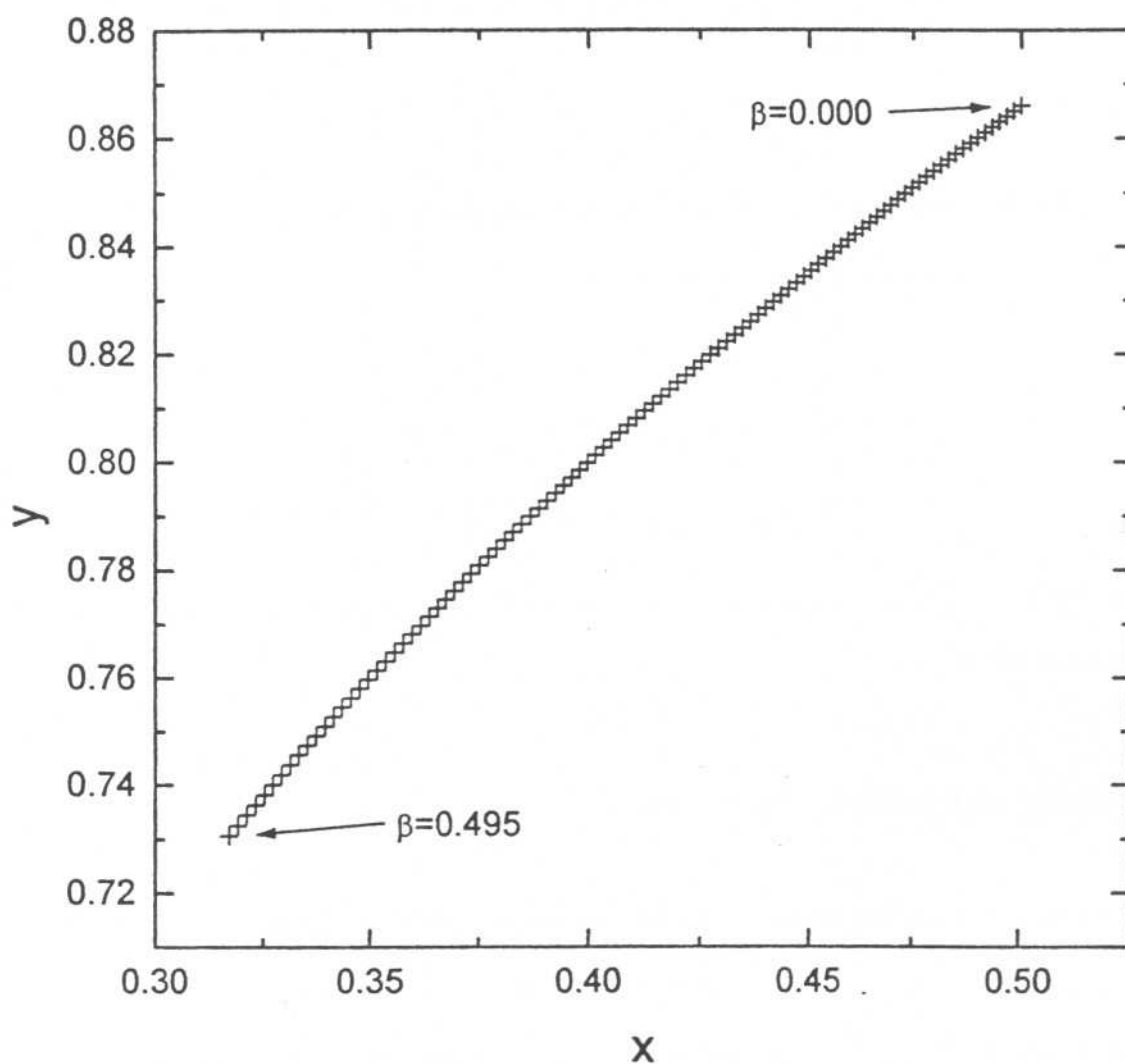


Figura 7.1: Posições do ponto L_4 no espaço de configuração versus o parâmetro β

Se considerarmos na expressão de (6.9) apenas o termo devido a pressão de radiação,

$F = \beta\mu \frac{r_i}{|r_i|^3}$, então nós temos que o movimento médio é expresso por

$$n_i^2 = \frac{\mu(1-\beta)}{|r_i|^3}.$$

Mas, como é sabido, um corpo (partícula) na região dos asteróides Troianos encontra-se na ressonância 1:1 com Júpiter. Assim, da razão do movimento médio deste corpo com o movimento médio de Júpiter, nós podemos obter

$$\frac{n_{particula}}{n_{Jupiter}} = \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{\frac{\mu(1-\beta)}{|r_{particula}|^3}}}{\sqrt{\frac{\mu}{|r_{Jupiter}|^3}}}$$

$$\Rightarrow |r_{particula}| = |r_{Jupiter}|(1-\beta)^{1/3} = (1-\beta)^{1/3} \quad (7.10)$$

Na figura 7.2 nós mostramos a diferença relativa entre os valores de $|r_{particula}|$ determinado via (7.10) e o obtido via

$$|r_{particula}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

aonde X e Y correspondem aos valores mostrados na figura 7.1.

Desta figura nós podemos constatar que a contribuição dos demais termos do efeito de Poynting-Robertson na perturbação do ponto L_4 é muito pequena quando comparados com o efeito da pressão de radiação.

7.3 Frequências Próprias e Autovalores Perturbados

Considerando o hamiltoniano (7.5), nós temos que a expressão da matriz da equação variacional é dada por

$$JD^2H(\bar{X}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{2}\mu & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{2}\mu & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Os autovalores de (7.11) são exatamente os autovalores dados por (4.5), obtidos do hamiltoniano não heliocêntrico:

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 27\mu(\mu - 1)}}{2}}. \quad (7.12a)$$

$$\alpha_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{1 + 27\mu(\mu - 1)}}{2}}. \quad (7.12b)$$

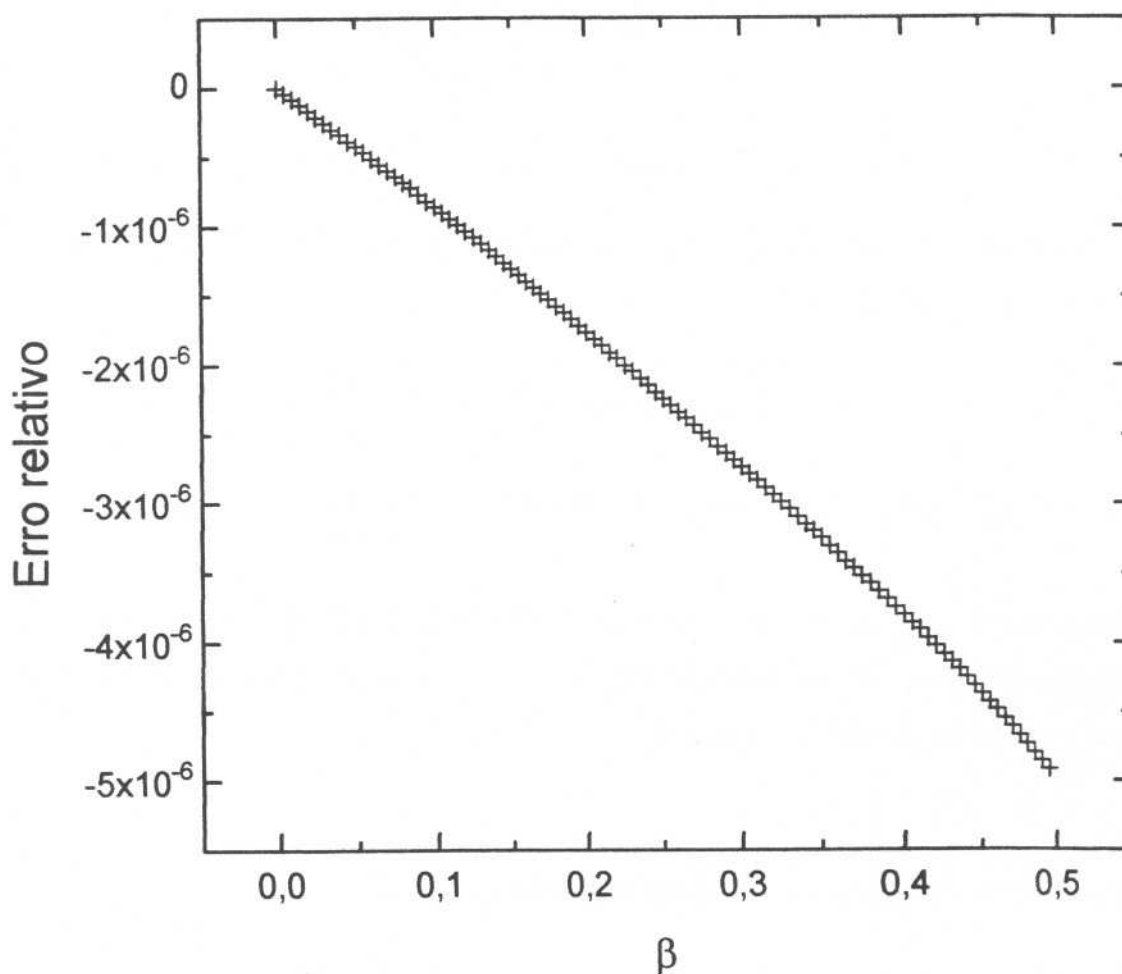


Figura 7.2: Diferença relativa entre os valores de $|r_{particula}|$ determinados via (7.10) e os valores mostrados na figura 7.1

Também, como é conhecido (ver, por exemplo, Landau e Lifshitz, 1966) $\Im(\alpha_1)$ e $\Im(\alpha_3)$ são as frequências próprias do movimento. Assim, da seção 1.1 nós temos que um

corpo com condição inicial muito próxima de $\bar{\mathbf{X}}$ pode ter o seu movimento no espaço de configuração, até primeira ordem, sendo dado por

$$X(t) = \bar{X} + \xi_x(t),$$

$$Y(t) = \bar{Y} + \xi_y(t).$$

Em termos das frequências próprias nós podemos fazer

$$\xi_{x,y}(t) = \Re(A_{x,y} e^{\alpha_1 t}) + \Re(B_{x,y} e^{\alpha_2 t}), \quad (7.13)$$

aonde $A_{x,y}$ e $B_{x,y}$ são as respectivas amplitudes complexas. Na figura 7.3 nós mostramos a variação da coordenada X , obtida via integração do sistema (7.8), aonde consideramos a razão de massa correspondente a de Júpiter e $F = 0$ (problema sem força dissipativa). A integração foi efetuada até o intervalo de tempo equivalente a 20 vezes o período de Júpiter (nas unidades normalizadas o período de Júpiter é igual a 2π), partindo da seguinte condição inicial (considerando $\beta = 0$):

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{2}(1 - \beta)^{1/3}, & \bar{P}_X &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \beta)^{1/3}, \\ \bar{Y} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \beta)^{1/3}, & \bar{P}_Y &= \frac{1}{2}(1 - \beta)^{1/3} - \mu. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Nesta figura, como era esperado, nós temos que as frequências próprias obtidas através de (7.12) correspondem às observadas (obtidas via integração). Também para a coordenada Y , semelhante resultado foi obtido.

Para o problema perturbado, $F \neq 0$, nós temos que os autovalores $\alpha_{1,\dots,4}$ devem possuir a parte real diferente de zero, fazendo com que os pontos (perturbados) L_4 e L_5 sejam instáveis. Para a determinação da parte perturbada dos autovalores, $\tilde{\alpha}_i$, nós utilizamos o método desenvolvido por nós para este fim, cuja expressão é dada por (5.15). O motivo da utilização do nosso método, ao invés do método fornecido por Mackay (equação 5.16), é que no nosso não há a necessidade de determinar os autovetores da matriz $JD^2H(\bar{\mathbf{X}})$. Deste modo nós construiremos a matrix $M(\epsilon)$ da mesma forma como descrita na seção 5.2, apenas usando F e DF no lugar de JDV e

JD^2V , respectivamente. Além disso, para o pequeno parâmetro, nós faremos

$$\epsilon = \frac{\beta(1 - \mu)}{c}.$$

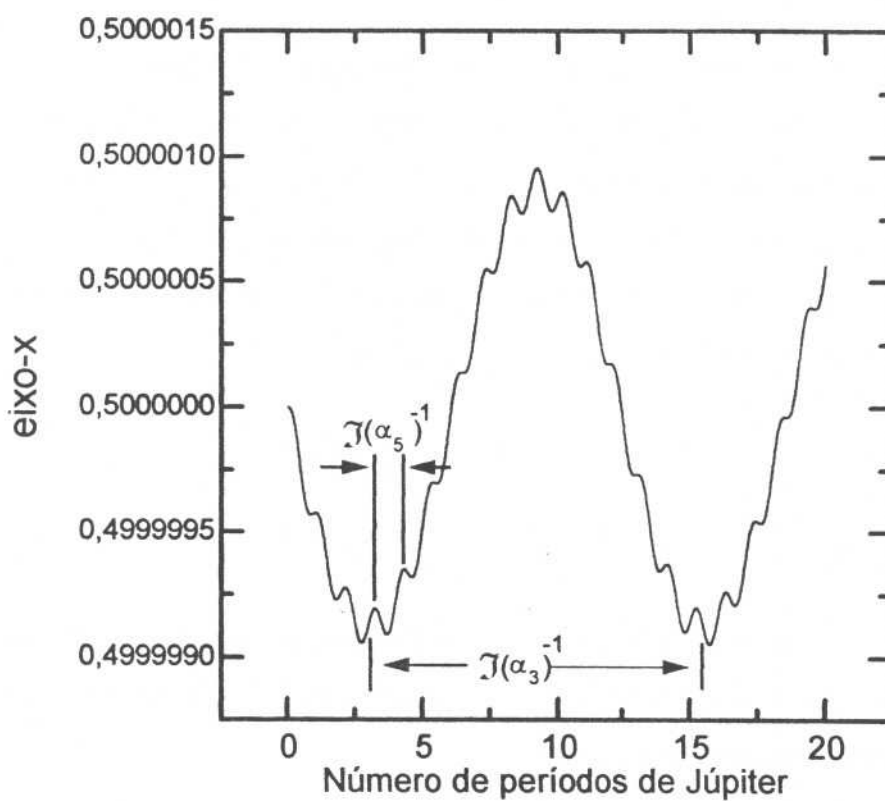


Figura 7.3: Variação da coordenada X , obtida via integração do sistema (7.8)

Para F e DF nós temos que

$$F(\bar{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(c + \sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}c - 1) \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

e

$$DF(\bar{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}c}{4} - \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}c}{4} + \frac{5}{4} & -\frac{5c}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Assim, considerando (7.11), (7.15) e (7.16), da solução de (5.15) (obtida via manipulador algébrico) nós determinamos a parte perturbada dos autovalores, cuja expressão algébricas é dada por

$$\tilde{\alpha} = \frac{\frac{-9}{4}\alpha\mu + \frac{27\sqrt{3}}{4}\mu + \frac{3}{2}\mu c - \frac{9}{2}\sqrt{3} - 3\alpha + 3\alpha^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\alpha^2}{2\alpha + 4\alpha^3}, \quad (7.17)$$

e de (5.13) nós calculamos finalmente os novos autovalores perturbados (para $\beta = 0.03$)

$$\alpha_{1,2} = 1.996 \cdot 10^{-6} \pm 7.8344 \cdot 10^{-2}i, \quad (7.18a)$$

$$\alpha_{3,4} = -3.953 \cdot 10^{-6} \pm 9.969 \cdot 10^{-1}i. \quad (7.18b)$$

Na figura 7.4 nós mostramos os deslocamentos sofridos pelos autovalores $\alpha_{1,\dots,4}$, resultante da ação do arrasto de Poynting-Robertson. Já na figura 7.5 nós mostramos a variação da coordenada X , obtida via integração numérica (aqui nós utilizamos o mapeamento misto conforme descrito no capítulo anterior) para um intervalo de tempo igual a 20000 vezes o período da órbita de Júpiter, considerando $\beta = 0.03$. Desta figura nós temos que o dobro das amplitudes máximas de oscilação, inicial e final, são dadas por

$$l_i = 0.635 - 0.305 = 0.330, \quad (7.19a)$$

$$l_f = 0.660 - 0.265 = 0.395, \quad (7.19b)$$

de onde se determina que a diferença entre elas é dada por

$$\Delta = l_f - l_i = 0.065. \quad (7.20)$$

Se nós considerarmos como $A/2$ a amplitude de oscilação inicial associada a frequência α_3 , e $B/2$ a amplitude de oscilação inicial associada a frequência α_1 , então nós temos que

$$l_i = A + B, \quad (7.21)$$

e

$$l_f = A \cdot e^{\omega_3 t_f} + B \cdot e^{\omega_1 t_f}, \quad (7.22)$$

aonde $\omega_i = \Re(\alpha_i)$ e $t_f = 2 \cdot \pi \cdot 20000$.

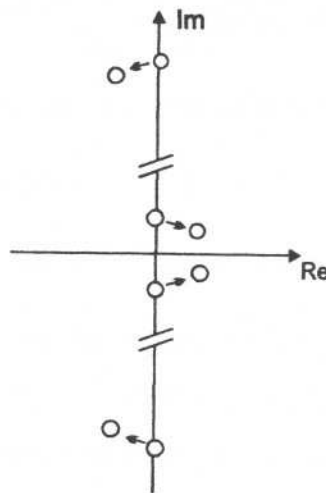


Figura 7.4: Deslocamentos dos autovalores $\alpha_{1,\dots,4}$.

Assim, de (7.20) nós temos que

$$\begin{aligned} \Delta &= A \cdot e^{\omega_3 t_f} + B \cdot e^{\omega_1 t_f} - l_i \\ &= (l_i - B) \cdot e^{\omega_3 t_f} + B \cdot e^{\omega_1 t_f}, \\ \Rightarrow B &= \frac{\Delta + l_i(1 - e^{\omega_3 t_f})}{(e^{\omega_1 t_f} - e^{\omega_3 t_f})} = 0.287, \\ \Rightarrow A &= 0.330 - 0.287 = 0.043. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Deste modo nós determinamos as amplitudes iniciais de oscilação associadas a α_1 e α_3 ($A/2$ e $B/2$), para a coordenada X , a partir do conhecimento de ω_1 , ω_3 , l_i e l_f .

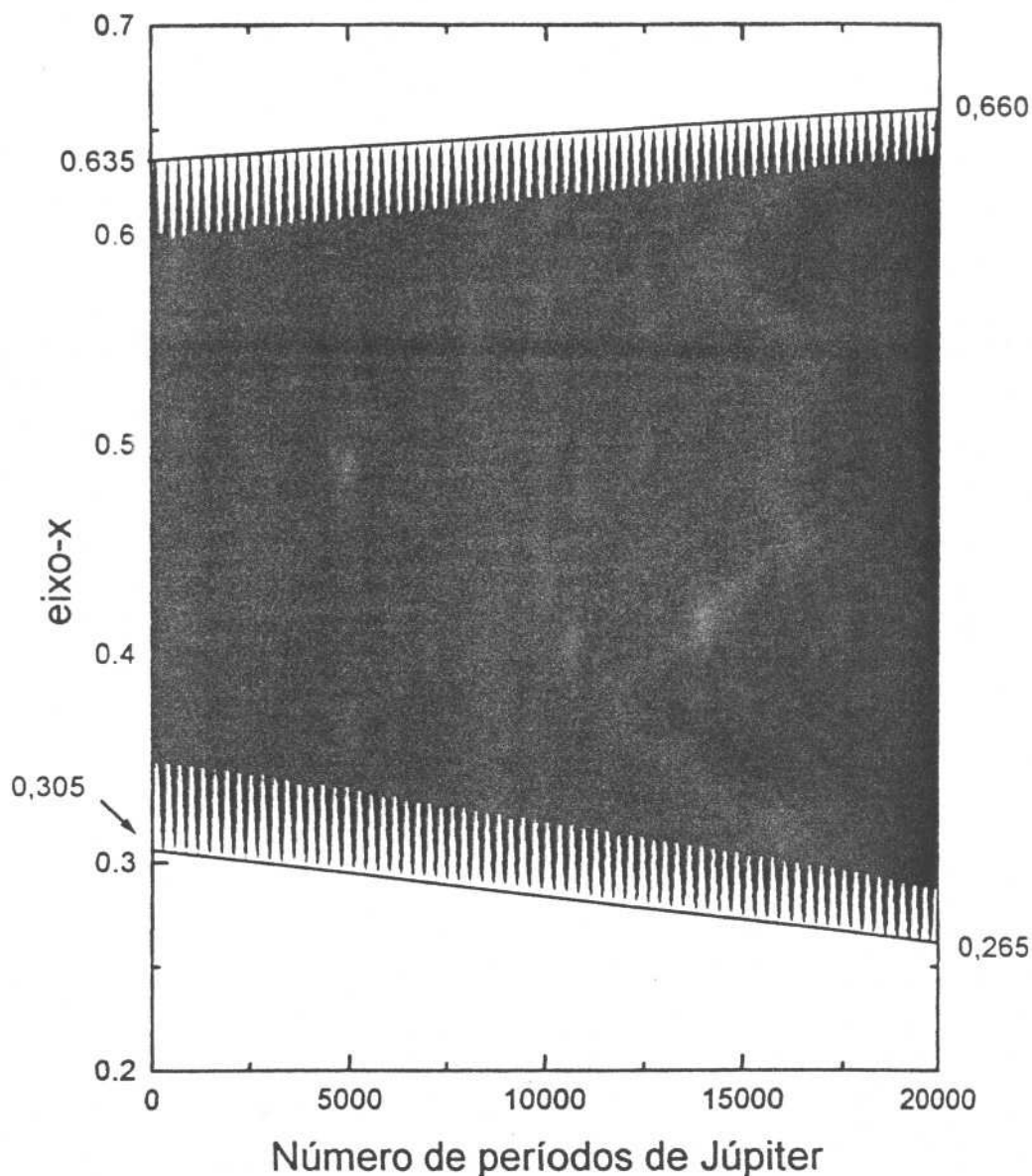


Figura 7.5: Variação da coordenada X para um intervalo de tempo igual a 20000 vezes o período de Júpiter, com condição inicial dada por (7.14).

Para um intervalo inicial de tempo igual a 20 vezes o período de Júpiter, nós mostramos, na figura 7.6, a variação da coordenada X (considerando $\beta = 0.03$), e destacamos as amplitudes iniciais associadas a $\alpha_{1,3}$.

Novamente, como esperado, nós temos uma boa concordância entre o resultado obtido via expressão (7.23) e o resultado fornecido pela integração numérica. O resultado obtido para a coordenada Y também apresentou a mesma concordância.

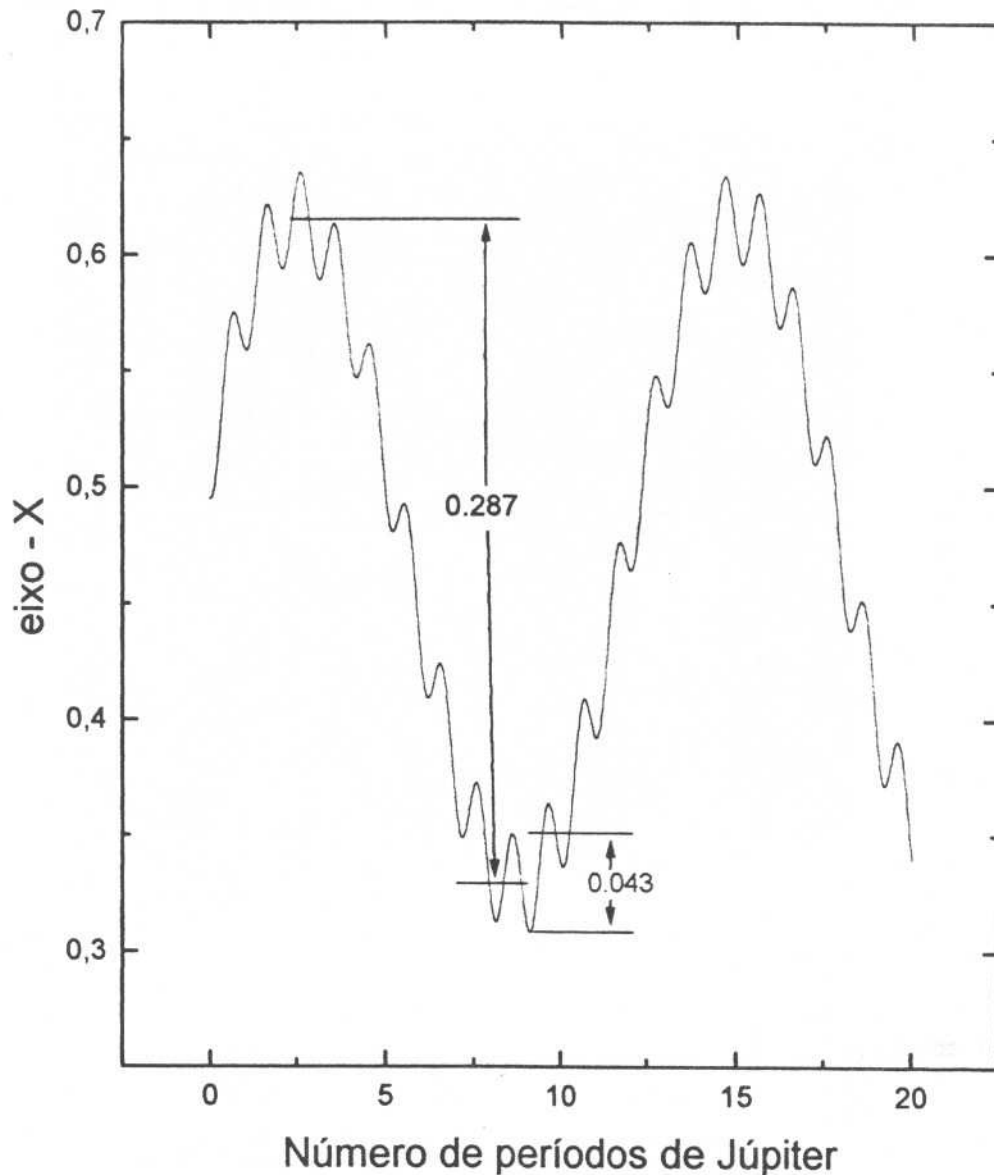


Figura 7.6: Variação da coordenada X para um período inicial igual a 20 vezes o período de Júpiter, com condição inicial dada por (7.14).

Destes resultados concluímos ser possível estudar o movimento de um corpo, via a determinação dos autovalores, até a primeira ordem na aproximação, quando este possui condição inicial muito próxima a de um ponto de equilíbrio que é estável quando a dissipação é removida do problema. O método que desenvolvemos para a determinação da parte perturbada dos autovalores, considerando problemas submetidos a pequenas perturbações conservativas, mostrou ser válido também para os problemas perturbados por pequenas forças dissipativas.

CONCLUSÃO

Neste trabalho nós empregamos a teoria de Krein na análise da estabilidade linear de diversos problemas da Dinâmica Orbital. Esta teoria, conforme mencionamos no capítulo 1, surgiu em 1950 para os problemas envolvendo órbitas periódicas embora no que diz respeito aos pontos de equilíbrio ela já era conhecida desde o final do século passado. Apesar de não ser um resultado recente, poucas aplicações foram feitas desde então a problemas relacionados a Mecânica Celeste. Muito provavelmente este fato está relacionado às dificuldades encontradas na obtenção das expressões analíticas não só dos autovalores mas principalmente dos autovetores. Para os problemas cujos autovalores possuem multiplicidade igual a um, é possível aplicar esta teoria empregando apenas métodos numéricos. Entretanto, se os autovalores possuem multiplicidade igual ou maior do que dois, ou também quando se deseja estudar o comportamento dos autovalores sob variações de parâmetros internos ou sob pequenas perturbações, então os métodos analíticos passam a ser necessários.

Ao nosso ver este é um ponto que destaca a importância deste trabalho. Aqui, graças ao emprego de manipuladores algébricos, desenvolvemos um método eficaz para a determinação da expressão algébrica de autovetores, e o empregamos com sucesso no estudo do problema de dois corpos submetido a uma particular perturbação (problema envolvendo órbitas periódicas - capítulo 2) e no estudo de potenciais genéricos expressos em coordenadas esféricas (problema envolvendo pontos de equilíbrio - capítulo 3 - com aplicações ao PRTC e ao potencial de corpos oblatos e prolatos - capítulo 4).

No estudo relacionado ao problema de dois corpos perturbado mencionado acima, os autovalores pertencem a uma matriz monodromia aproximada. Para obtermos esta matriz, um método também foi desenvolvido cujo emprego pode ser estendido a qualquer problema envolvendo órbitas periódicas, com hamiltoniano expresso como em (2.1), e que satisfaça também as condições referentes a existência de órbitas perturbadas periódicas.

No capítulo 3 dois pontos são destacados por nós: o primeiro foi o êxito obtido na determinação de todos os autovalores e autovetores dos potenciais genéricos estudados. Em especial, para o potencial $U(r, \theta, \phi)$, nós destacamos que a expressão algébrica dos autovetores, mostrada em (3.58), se expandida (levando em conta também a expressão algébrica dos autovalores), ocuparia o correspondente a quase 3000 páginas de formulário contínuo. E o segundo ponto que mencionamos é o resultado contido na proposição 1 deste capítulo. Devido a importância do potencial $U(r, \phi)$ esta proposição é, ao nosso ver, um dos principais resultados deste trabalho.

Para o estudo relacionado aos autovalores perturbados de pontos de equilíbrio, nós desenvolvemos um método para a determinação da parte perturbada destes autovalores e constatamos que este método fornece praticamente os mesmos valores que o método utilizado por MacKay. A vantagem de se utilizar o nosso método está no fato de não ser necessário a determinação dos autovetores, como requer o outro método. Para Marte, como também para os demais planetas jovianos, este método foi aplicado para o estudo do efeito das perturbações de um corpo em órbita circular, interna ou externa, sobre os pontos L_4 e L_5 . Apesar do efeito ser pequeno, uma interessante característica relacionada a ação do corpo perturbador sobre os autovalores foi determinada: para cada razão de massa do PRTC, existe um valor crítico para o raio da órbita do corpo perturbador tal que, para qualquer corpo perturbador com raio menor que o raio crítico, o efeito sobre o autovalor α_3 é de aproxima-lo da origem (no plano complexo), enquanto para um corpo com raios maior que o raio crítico a ação é de afasta-lo da origem, aproximando-o do autovalor α_5 . Para o Sistema Solar atual aonde as razões de massas são muito pequenas, conclui-se que os corpos perturbadores com órbitas interiores aos raios críticos de cada planeta tendem a "diminuir" a estabilidade dos pontos L_4 e L_5 , enquanto os corpos perturbadores com raios maiores que o raio crítico tendem a "aumentar" a estabilidade destes pontos.

Como complemento ao estudo sobre as consequências das perturbações sobre os autovalores, também analisamos o efeito do arrasto de Poynting-Robertson sobre uma

partícula próxima ao ponto L_4 de Júpiter. Nesta parte as integrações numéricas das órbitas foram feitas via mapeamento para problemas dissipativos, que foi desenvolvido para este fim, e as partes perturbadas dos autovalores foram obtidas pelo método desenvolvido por nós no capítulo 5. Deste estudo concluímos ser possível também estudar através destes métodos os movimentos de pequenos corpos próximos a pontos de equilíbrio e sujeitos a pequenas forças dissipativas.

BIBLIOGRAFIA

- Abraham, R., Marsden, J. E.(1978) *Foundations of Mechanics*, The Benjamin Cummings Pub.
- Binney, J., Tremaine, S.(1987) *Galactic Dynamics*, Princeton Univ. Press.
- Blitzer, L., Boughton, E. M., Kang, G., Page, R. M.(1962) "Effect of Ellipticity of the Equator on 24-Hour nearly Circular Satellite Orbits", *J. Geophys. Res.*, **67**, 329.
- Blitzer, L.(1985) "Existence and Stability of Circular Orbits in Axially-Symmetric Gravitational Fields", *Stability of the Solar System and Its Minor Natural and Artificial Bodies*, 83,(V. Szebehely ed.) D. Reidel Pub. Cia.
- Bowell, E.(1990) *IAU-Circular*, No. **5067**.
- Broucke, R.(1969) "Stability of Periodic Orbits in the Elliptic, Restricted Three-Body Problem", *A. I. A. A. Journal*, **7**, 1003.
- Brouwer, D.(1959) "Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory Without Drag", *Astron. J.*, **64**, 1274.
- Brouwer, D., Clemence, G. M.(1961) *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press.
- Burns, J. A., Lamy, P. L., Soter, S.(1979) "Radiation forces on Small Particles in the Solar System", *Icarus*, **40**, 1.
- Chirikov, B. V.(1979) "An Universal Instability of Many Dimensional Oscillator

- Systems", *Phys. Report.*, **52**, 263.
- Coddington, E. A., Levinson, N.(1955) *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company.
 - Cordeiro, R. R., Vieira Martins, R.(1992) "Krein Stability in the Disturbed Two-Body Problem", *Chaos, Resonance and Collective Dynamical Phenomena in the Solar System* (S. Ferraz-Mello ed.), 369, Kluwer Acad. Pub.
 - Cordeiro, R. R., Vieira Martins, R.(1994) "Effect of Krein Signatures on the Stability of Relative Equilibria", *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, a ser publicado.
 - Danby, J. M. A.(1964) "The Matrizant of Keplerian Motion", *A. I. A. A. Journal*, **2**, 16.
 - Danby, J. M. A.(1988) *Fundamentals of Celestial Mechanics*, Willmann Bell.
 - Deprit, A., Henrard, J.(1968) "A Manifold of Periodic Orbits", *Advances in Astronomy and Astrophysics*, **6**, 1.
 - Forest, E., Ruth, R. D.(1990) "Fourt-order Symplectic Integration", *Physica D*, **43**, 105.
 - Gelfand, I. M., Lidskii, V. B.(1955) "On the Structure od Stability Domains of Linear Canonical Systems of Differential Equation With Periodics Coeficients", *Uspekhi Mat. Nauk.*, **10**, 3.
 - Hadjidemetriou, J. D.(1977) *Lectures on Periodic Orbits and Their Stability*, Université de Paris IV.

- Hadjidemetriou, J. D.(1982) "On the Relation Between Resonance and Instability in Planetary Systems", *Celes. Mech.*, **27**, 305.
- Hadjidemetriou, J. D.(1985) "The Stability of Resonant Orbits in Planetary Systems", *Resonances in the motion of Planets, Satellites and Asteroids* (S. Ferraz-Mello e W. Sessin eds.), 1, Universidade de São Paulo - Instituto Astronômico e Geofísico.
- Hagihara, Y.(1970) *Celestial Mechanics*, Vol. I, MIT Press.
- Hirsch, M. W., Smale, S.(1974) *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press.
- Holman, M. J., Wisdom, J.,(1993) "Dynamical Stability in the Outer Solar System and the Delivery of Short Period Comets", *Astron. J.*, **105**, 1987.
- Holt, H. E.(1990) *IAU-Circular*, No. 5045.
- Horn, R. A., Johnson, C. A.(1985) *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press.
- Howard, J. E.,(1990) "Spectral Stability of Relative Equilibria", *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **48**, 267.
- Howard, J. E., MacKay, R. S.(1987a) "Linear Stability of Symplectic Maps", *J. Math. Phys.*, **28**, 1036.
- Howard, J. E., MacKay, R. S.(1987b) "Calculation of Linear Stability Boundaries for Equilibria of Hamiltonian Systems", *Physics Lett. A*, **122**, 331.
- Innanen, K. A., Mikkola, S.(1989) "Studies on Solar System Dynamics. I, The

- Stability of Saturnian Trojans", *Astron. J.*, **97**, 900.
- Izsak, I. G.(1961) "A Determination of the Ellipticity of the Earth's Equator from the Motion of Two Satellites", *Astron. J.*, **66**, 226.
 - Kerr, R. A.(1994) "A Rejuvenated Companion for Ida?", *Science*, **256**, 470.
 - Kinoshita, H.(1990) *IAU-Circular*, **No. 5075**.
 - Lagrange, J. L.(1873) *Oeuvres de Lagrange*, **VI**, 229, Gauthier-Villars.
 - Landau, L., Lifchitz, E.(1966) *Mécanique*, Mir.
 - MacKay, R. S.(1986) "Stability of Equilibria of Hamiltonian Systems", *Nonlinear Phenomena and Chaos*, 244,(S. Sarkar ed.), Adam Hilger.
 - MacKay, R. S.(1991) "Movement of Eigenvalues of Hamiltonian Equilibria Under Non-Hamiltonian Perturbation", *Phys. Lett. A*, **155**, 266.
 - Mikkola, S., Innanen, K. A.(1992) "A Numerical Exploration of the Evolution of Trojan-Type Asteroidal Orbits", *Astron. J.*, **104**, 1641.
 - Moser, J.(1958) "New Aspects in the Theory of Stability of Hamiltonian Systems", *Comm. Pure and Appl. Math.*, **XI**, 81.
 - Moulton, F. R.(1920) "Periodic Orbits", *Carnegie Institute of Washington Publications*, **161**.
 - Pars, L. A.(1965) *A Treatise on Analytical Dynamics*, Ox Bow Press.

- Poincaré, H.(1892) *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Tomo I, Gauthier - Villars.
- Robinson, R. C.(1971) *Lectures on Hamiltonian Systems*, Monografias de Matemática 7, IMPA.
- Stromgren, E.(1935) "Connaissance Actuelle des Orbits dans le problème des Trois Corps", *Publications and Minor Communications of Copenhagen Observatory*, 100.
- Stuchi, T. J.(1991) *Mapeamentos Derivados do Sistema Auxiliar de Hori para a Ressonância Asteroidal de Primeira ordem*, Tese de Doutorado, ITA.
- Szebehely, V.(1984) "Review of Concepts of Stability", *Celes. Mech.*, 34, 49.
- Veverka, J., Belton, M., Klaasen, K., Chapman, C.(1994) "Galileo's Encounter With 951 Gaspra", *Icarus*, 107, 2.
- Wisdom, J.(1982) "The Origin of the Kirkwood Gaps: A Mapping for Asteroidal Motion Near the 3/1 commensurability", *Astron. J.*, 87, 577.
- Wisdom, J., Holman, M.(1991) "Symplectic Maps for the N-Body problem", *Astron. J.*, 102, 1528.
- Wyatt, S. P., Whipple, F. L.(1950) "The Poynting-Robertson Effect on Meteor Orbits", *Astrophys. J.*, 111, 134.
- Yakubovich, V. A., Starzhinskii (1975) *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*, vol. I, Jonh Wiley & Sons.
- Yoshida, H.(1990) "Construction of Higher Order Symplectic Integrators", *Phys.*

Lett. A, **150**, 262.

- Zhang, S. P., Innanen, K. A.(1988a) "A Numerical Investigation of the Stability of Saturn's Triangular Lagrange Points", *Astron. J.*, **96**, 1983.
- Zhang, S. P., Innanen, K. A.(1988b) "A Numerical Investigation of the Stability of the Triangular Lagrange Points of the Planets", *Astron. J.*, **96**, 1989.
- Zhang, S. P., Innanen, K. A.(1988c) "The Motion of Planetary Triangular Lagrange Particles With High Inclinations", *Astron. J.*, **96**, 1995.